ТРУДЫ

1-го Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей

МАТЕМАТИКИ.

27-го Декабря 1911 г. ——— 3-го Января 1912 г.

ТОМЪ I.

ОБЩІЯ СОБРАНІЯ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Тип. «СѢВЕРЪ», Невскій пр., 140—2.
1913.

Предоставьте мнѣ дѣло воспитанія, и я измѣню лицо Европы менѣе, чѣмъ въ одинъ вѣкъ.

Лейбницъ.

Я считаю, что всѣ науки безъ исключенія экспериментальны, по крайней мѣрѣ, до извѣстной степени.

Лезанъ.

Въ 1908 г. профессоръ Нью-Іоркскаго университета *Смитъ* внесъ въ секцію преподаванія 4-го международнаго конгресса математиковъ, собравшагося въ Римѣ, предложеніе объ избраніи особой международной комиссіи, которой было-бы поручено обслѣдованіе вопроса о преподаваніи математики въ различныхъ странахъ. Конгрессъ отнесся съ большимъ сочувствіемъ къ этой мысли и слѣдующимъ образомъ формулировалъ свое постановленіе по этому поводу:

„Руководясь убѣжденіемъ въ важности сравнительнаго изученія методовъ и учебныхъ плановъ преподаванія математики въ среднихъ школахъ различныхъ странъ, Конгрессъ поручаетъ г.г. Клейну (Klein), Гринхиллу (Greenhill) и Феру (Fehr) образовать международную комиссію для изученія этого вопроса и представить отчетъ ближайшему Конгрессу".

Желательность всесторонняго изслѣдованія методовъ преподаванія математики чувствовалась въ З. Европѣ уже давно и въ значительной степени проистекала изъ повсемѣстнаго недовольства постановкой преподаванія этого предмета.

Почти 50 лѣтъ тому назадъ Керъ (Kehr) свидѣтельствуетъ о жалобахъ учителей на плохіе результаты обученія математикѣ въ нѣмецкой школѣ, а съ легкой руки Ридлера (Riedler), давшаго въ 1895 году рѣзкую критику

этого преподаванія, въ Германіи началось, такъ называемое, движеніе инженеровъ въ пользу реформы преподаванія.

Во Франціи въ 1898 году была образована парламентская комиссія изъ 33 депутатовъ подъ предсѣдательствомъ бывшаго перваго министра Рибо для изслѣдованія нуждъ средняго образованія путемъ собиранія разнаго рода фактическихъ цифровыхъ и иныхъ данныхъ, а также опроса лицъ, мнѣнія которыхъ могли представлять интересъ и значеніе. Данныя, собранныя Комиссіей, работавшей съ Января до Апрѣля 1899 г., напечатаны въ 6 томахъ „Enquête sur l'Enseignement Secondaire", представляющихъ въ высшей степени драгоцѣнный источникъ для изученія положенія средней школы во Франціи въ концѣ XIX вѣка. Въ анкетѣ, среди другихъ жалобъ на французскую среднюю школу вообще, встрѣчается не мало указаній и на неудовлетворительность лицейскаго преподаванія математики. Математическія познанія бывшихъ лицеистовъ, по мнѣнію весьма компетентныхъ лицъ, принявшихъ участіе въ анкетѣ, представляютъ жалкую картину. Вотъ, что говоритъ объ этомъ, напримѣръ, *Бюкэ*, директоръ такъ называемой Центральной Школы, куда молодые люди, окончившіе лицеи, поступаютъ какъ и въ другія высшія школы Франціи—Политехническую и Нормальную—по предварительному испытанію.

„Прискорбно видѣть поступающихъ въ высшую школу двадцати-лѣтнихъ молодыхъ людей, продѣлавшихъ на экзаменѣ рядъ выкладокъ и не способныхъ дать себѣ отчетъ, чего они искали, чего ждали отъ выведенныхъ въ нѣсколько рядовъ формулъ";

и въ другомъ мѣстѣ:

„съ большой тревогой мы должны заявить, что являющіеся къ намъ на экзаменъ ученики лицеевъ, рекомендованные учителями, какъ первые въ классѣ и какъ отлично знающіе алгебраическій анализъ, исписавъ безъ остановки доску формулами и придя къ концу, рѣшительно не знаютъ, что собственно они хотѣли сдѣлать и найти"...

„Воспитанники"

говоритъ *Пэйо* (J. Payot)

„отдѣлены отъ жизни и дѣйствительности стѣною словъ и совершенно не привыкли заглядывать внутрь себя... Вся ихъ умственная энергія вертится на словахъ".

Такова картина, даваемая парламентской анкетой. А между тѣмъ обученіе матиматикѣ весьма распространено у латин-

скихъ народовъ. Эта отрасль знаній пользуется у нихъ наибольшимъ почетомъ и служитъ средствомъ для отбора кандидатовъ, принимаемыхъ въ высшія школы. Программы пріемныхъ испытаній Политехнической и Центральной школъ почти исключительно заполнены вопросами по математикѣ.

Подъ вліяніемъ общаго недовольства существующимъ положеніемъ вещей, правительственныя учрежденія разныхъ странъ, математическія организаціи и отдѣльныя лица въ началѣ XX вѣка предпринимаютъ рядъ работъ, направленныхъ къ радикальной реформѣ преподаванія математики.

Въ Германіи въ 1903 г. на Кассельскомъ съѣздѣ естествоиспытателей и врачей было рѣшено заняться разсмотрѣніемъ преподаванія не только наукъ естественныхъ, но и математическихъ и „всю совокупность вопросовъ математическо-естественно-научнаго преподаванія сдѣлать предметомъ подробнаго обсужденія при ближайшей возможности". Въ слѣдующемъ же году на съѣздѣ въ Бреславлѣ была выбрана Комиссія, которая въ 1905 г. представила Меранскому Съѣзду проектъ реформы преподаванія математики.

Во Франціи въ 1902 г., т. е. всего только черезъ два года послѣ окончанія работъ анкетной комиссіи по изслѣдованію состоянія и нуждъ средняго образованія, было уже одобрено палатой и обнародовано новое положеніе о лицеяхъ, существеннымъ образомъ коснувшееся и преподаванія математики. Такимъ образомъ во Франціи вопросъ о реформѣ преподаванія математики тѣсно сплелся съ реформой средней школы вообще.

Даже въ такой консервативной въ педагогическомъ отношеніи странѣ, какъ Англія, стали серьезно задумываться надъ реформой преподаванія математики. Реформаторская дѣятельность „Британской ассоціаціи для усовершенствованія преподаванія геометріи" служитъ нагляднымъ этому доказательствомъ.

Въ Америкѣ проф. Смитъ въ 1905 г. въ своемъ отвѣтѣ на международную анкету, предпринятую журналомъ „L' Enseignement mathématique" по вопросу „о реформѣ,

подлежащей осуществленію", высказывалъ уже, развитую имъ впослѣдствіи на Римскомъ Конгрессѣ, мысль объ образованіи особой международной комиссіи по этому вопросу.

Международное движеніе, имѣющее цѣлью обслѣдованіе методовъ преподаванія математики, нашло откликъ и у насъ въ Россіи. Потребность въ общеніи преподавателей математики между собой для совмѣстнаго обсужденія волнующихъ ихъ вопросовъ преподаванія не разъ высказывалась въ послѣдніе годы. На XII-мъ Съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ 1909 году, на Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ по экспериментальной педагогикѣ въ 1910 году, на Рижской педагогической выставкѣ 1911 года раздавались находившіе сочувствіе голоса о созывѣ Съѣзда преподавателей математики.

Мысль о созывѣ такого Съѣзда въ Петербургѣ на Рождественскихъ каникулахъ 1911-12 года принадлежитъ отдѣлу математики Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній.*) Еще въ 1907 году отдѣлъ предпринялъ рядъ работъ, имѣвшихъ цѣлью обсужденіе тѣхъ новыхъ идей, содержаніе которыхъ связано съ именами *Клейна*, *Лезана*, *Лоджа*, *Перри* и другихъ сторонниковъ реформы курса школьной математики, а въ 1909 году, желая принять посильное участіе въ подготовкѣ Россіи къ V-му Международному Конгрессу математиковъ, назначенному въ Кембриджѣ въ 1912 году, рѣшилъ заняться разработкой докладовъ по вопросамъ, подлежащимъ внесенію въ конгрессъ. Схема этихъ вопросовъ и общія указанія, относящіяся до ихъ содержанія, приведены въ „*Предварительномъ докладѣ*" Международной Комиссіи по преподаванію математики, обнародованномъ г. Феромъ, главнымъ секретаремъ Комиссіи, въ журналѣ „L' Enseignement mathématique"—оффиціальномъ ея органѣ**). Въ „предварительномъ докладѣ" указывается, что

---

*) Краткія свѣдѣнія объ этой организаціи приведены на стр. 304—315 „Трудовъ", томъ 1-й.

**) См. № отъ 15 ноября.

Въ 1909 г. русская делегація Международной комиссіи—Г.г. Н. Я. Сонинъ, Б. М. Кояловичъ и К. В. Фохтъ—издали „предварительный докладъ" въ переводѣ на русскій языкъ. Вслѣдъ за этимъ онъ появился въ „Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія" и другихъ педагогическихъ и научныхъ изданіяхъ.

цѣль работъ Комиссіи состоитъ съ одной стороны „въ разслѣдованіи современныхъ направленій въ преподаваніи математики въ разныхъ странахъ“, а съ другой — „въ выясненіи тѣхъ общихъ принциповъ, которыми слѣдуетъ руководиться учителю при преподаваніи“. Въ эту вторую часть вошли вопросы: о современныхъ тенденціяхъ, относящихся къ цѣлямъ математическаго образованія и къ выбору предметовъ преподаванія; о современныхъ идеяхъ, касающихся методовъ преподаванія на различныхъ ступеняхъ и въ школахъ различныхъ типовъ; о связи между различными вѣтвями математики и о связи математики съ другими отраслями знанія и т. п. Выработка программъ преподаванія и установленіе однообразія въ деталяхъ въ задачу комиссіи не входили.

Рядъ докладовъ именно вышеуказаннаго *общаго* характера, сдѣланныхъ въ Отдѣлѣ въ 1909-10 и 1910-11 годахъ г.г. В. Р. Мрочекомъ, Т. А. Эренфестъ, С. И. Шохоръ-Троцкимъ, Д. М. Левитусомъ, Б. Б. Піотровскимъ, Ф. В. Филипповичемъ, Н. А. Томилинымъ и другими преподавателями математики, возбудилъ вниманіе Петербургскихъ педагоговъ. Засѣданія отдѣла стали особенно многолюдны и оживленны; высказывались весьма разнообразныя точки зрѣнія на затрагиваемые вопросы, и вмѣстѣ съ тѣмъ созрѣвала и крѣпла мысль о еще болѣе широкомъ общеніи для обмѣна мнѣніями о Всероссійскомъ Съѣздѣ.

Работы по созыву Съѣзда шли въ слѣдующей постепенности.

Первое совѣщаніе кружка лицъ, взявшихъ на себя эту задачу, состоялось 4-го мая 1911 года. Въ кружокъ этотъ входили: Членъ Государственнаго Совѣта проф. А. В. Васильевъ, директоръ Педагогическаго Музея в.-уч. зав. З. А. Макшеевъ, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савичъ, помощникъ директора Пед. Музея Д. Э. Теннеръ, преподаватели математики — В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ и секретарь отдѣла математики Педагогическаго Музея преподаватель Д. М. Левитусъ.

На этомъ совѣщаніи было выработано „Положеніе о

Съѣздѣ“ *), представленное 7-го мая въ Министерство Внутреннихъ Дѣлъ вмѣстѣ съ подписаннымъ Г.г. Васильевымъ, Макшеевымъ, Поссе и Савичемъ ходатайствомъ о разрѣшеніи созвать Съѣздъ.

На второмъ совѣщаніи, состоявшемся 10-го мая, въ которомъ, кромѣ вышеперечисленныхъ лицъ, принималъ участіе проф. Харьковскаго Университета Д. М. Синцовъ, было постановлено, не ожидая формальнаго разрѣшенія на созывъ Съѣзда, немедленно-же, передъ каникулами, предпринять нѣкоторыя мѣры, какъ для распространенія свѣдѣній о Съѣздѣ, такъ и для его подготовки. Съ этой цѣлью было рѣшено выработать особое воззваніе къ Обществу. Текстъ воззванія, окончательно установленный въ совѣщаніи 15-го мая, содержалъ, между прочимъ, слѣдующія строки.

„Успѣшная организація Съѣзда можетъ быть достигнута только путемъ совмѣстнаго труда всѣхъ лицъ, сочувствующихъ идеѣ Съѣзда.

Поэтому иниціаторы Съѣзда обращаются къ Вамъ съ покорнѣйшей просьбой—принять участіе въ подготовительныхъ къ Съѣзду работахъ въ районѣ Вашей дѣятельности и вліянія. На первыхъ порахъ Ваше содѣйствіе можетъ выразиться въ распространеніи свѣдѣній о Съѣздѣ среди лицъ и учрежденій, на сочувствіе которыхъ идеѣ Съѣзда можно разсчитывать.

Въ началѣ 1911—12 учебнаго года предположено организаціонное совѣщаніе Комитета Съѣзда для окончательнаго установленія срока представленія докладовъ и порядка ихъ разсмотрѣнія. Присутствіе въ этомъ совѣщаніи делегатовъ отъ педагогическихъ Обществъ и математическихъ Кружковъ въ высшей степени желательно. Въ случаѣ же невозможности личнаго участія делегатовъ въ этомъ совѣщаніи ожидается присылка въ Комитетъ письменныхъ заявленій, касающихся организаціи занятій Съѣзда. Въ этомъ же совѣщаніи будетъ возбужденъ вопросъ о пополненіи состава Комитета Съѣзда новыми сочленами.

Если результатомъ Съѣзда явится единеніе русскихъ преподавателей математики на почвѣ выясненія ихъ педагогическихъ и методическихъ взглядовъ, на почвѣ указанія общихъ неотложныхъ задачъ ближайшаго будущаго для школьной математики, то иниціаторы Съѣзда будутъ считать свою задачу выполненной“.

Воззваніе это было напечатано и вмѣстѣ съ проектомъ Положенія о Съѣздѣ разослано въ числѣ 2000 экземпля-

*) См. стр. XV.

ровъ столичнымъ и провинціальнымъ педагогическимъ и научнымъ Обществамъ и Кружкамъ, нѣкоторымъ отдѣльнымъ лицамъ, а также въ редакціи журналовъ и газетъ съ просьбой помѣстить на страницахъ ихъ органовъ полностью, или, хотя-бы, въ извлеченіи.

Разрѣшеніе на созывъ Съѣзда послѣдовало лѣтомъ, а въ августѣ было разослано приглашеніе на назначенное въ Педагогическомъ Музеѣ 2-го сентября первое засѣданіе Организаціоннаго Комитета, съ просьбой, въ случаѣ невозможности прибыть, сообщить письменное предположеніе относительно предстоящей дѣятельности Комитета.

2-го сентября Комитетъ соорганизовался въ слѣдующемъ составѣ:

Предсѣдатель — директоръ Педагогическаго Музея, ген.-л. З. А. Макшеевъ;

Товарищи предсѣдателя — ген.-л. М. Г. Попруженко, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савичъ;

Секретари — Д. М. Левитусъ, В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ;

Казначей—Д. Э. Теннеръ.

Члены: проф. А. В. Васильевъ, И. Н. Кавунъ, пр.-д. В. Ѳ. Каганъ (Одесса), А. Р. Кулишеръ, А. К. Линдебергъ, Э. Ю. Лундбергъ, проф. Б. К. Млодзѣевскій (Москва), С. Г. Петровичъ, Б. Б. Піотровскій, проф. Д. М. Синцовъ (Харьковъ), Н. А. Томилинъ, В. І. Шиффъ, С. И. Шохоръ-Троцкій, Т. А. Афанасьева-Эренфестъ, П. С. Эренфестъ.

Изъ состава Организаціоннаго Комитета было выдѣлено „Бюро"; въ него вошли предсѣдатель, секретари и казначей Организаціоннаго Комитета. На „Бюро" возложено было веденіе переписки, выдача справокъ и, вообще, вся текущая дѣятельность по созыву Съѣзда.

Для завѣдыванія выставкой учебныхъ пособій и книгъ по математикѣ избрана *Выставочная Комиссія* слѣдующаго состава: Д. Э. Теннеръ (предсѣдатель), С. А. Богомоловъ, В. И. Гартьеръ, М. А. Знаменскій, И. Н. Кавунъ, А. Р. Кулишеръ, В. Р. Мрочекъ, Н. А. Томилинъ, Ф. В. Филипповичъ, М. Л. Франкъ, П. С. Эренфестъ.

Для подыскиванія помѣщеній членамъ Съѣзда на

льготныхъ условіяхъ, исходатайствованія льготъ для проѣзда и пр. образована *Хозяйственная Комиссія;* въ нее вошли: Д. Э. Теннеръ (предсѣдатель), К. Д. Дмитріевъ, Я. В. Іодынскій и Т. А. Эренфестъ.

Кромѣ этихъ работъ организаціоннаго характера, въ засѣданіи 2-го сентября былъ заслушанъ перечень поступившихъ уже докладовъ и постановлено, чтобы всѣ доклады, или ихъ конспекты, разсматривались въ засѣданіяхъ Комитета, который и рѣшаетъ вопросъ о ихъ допущеніи на Съѣздъ; крайнимъ срокомъ для представленія докладовъ было назначено 15 ноября.

Для планомѣрности въ подготовкѣ докладовъ рѣшено было обратиться къ нижепоименованнымъ лицамъ съ просьбой взять на себя разработку и представленіе докладовъ *общаго характера* по программѣ Съѣзда (§ 4-й Положенія):

Къ С. И. Шохоръ-Троцкому—по п. I: „Психологическія основы обученія математикѣ".

К. А. Поссе и *Д. М. Синцову*—по п. III, а: „Согласованіе программъ математики средней школы съ программами высшихъ школъ".

М. Г. Попруженко — по п. V, а: „Учебная литература по математикѣ".

В. В. Бобынину—по п. VI, а: „Историческіе элементы въ курсѣ математики средней школы".

А. В. Васильеву—по п. VI, б: „Философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы".

В. Ѳ. Кагану—по п. VIII: „Подготовка учителей математики".

С. И. Шохоръ-Троцкому—по п. VIII, въ части, касающейся военно-учебныхъ заведеній.

По пункту IV: „Вопросы методики школьной математики", въ виду обширности и разнообразія затрагиваемыхъ имъ вопросовъ, рѣшено образовать особую комиссію.

По пункту V, б: „Учебныя пособія по математикѣ (не книги)" — вся работа поручена Выставочной Комиссіи.

Всѣ эти постановленія были напечатаны и разосланы въ значительномъ числѣ экземпляровъ.

Дальнѣйшія засѣданія Организаціоннаго Комитета посвящались, главнымъ образомъ, разсмотрѣнію поступавшихъ докладовъ. Только два изъ нихъ были отклонены; всѣ-же остальные допущены къ прочтенію на Съѣздѣ.

Въ дѣятельности Комитета и его органовъ можно отмѣтить еще слѣдующія подробности.

Редакція журнала „Обновленіе Школы" обратилась въ Комитетъ съ предложеніемъ *безвозмездно* издавать бюллетени Съѣзда. Комитетъ принялъ это предложеніе, поручивъ „Бюро" редактированіе бюллетеней. Всѣхъ бюллетеней съ 20 октября 1911 г. по 22 января 1912 г. было выпущено восемь номеровъ.

Въ бюллетеняхъ помѣщались свѣдѣнія о дѣятельности Организаціоннаго Комитета и о ходѣ занятій во время Съѣзда. Къ сожалѣнію, раздача бюллетеней, выходившихъ во время Съѣзда (№№ 4—7), не сразу наладилась, вслѣдствіе чего не всѣ члены Съѣзда могли своевременно получать ихъ. Но, все-же, изданіе бюллетеней, не вызвавъ денежныхъ расходовъ, прошло не безъ пользы въ отношеніи освѣдомленія о Съѣздѣ.

Ходатайства Организаціоннаго Комитета передъ начальниками учебныхъ вѣдомствъ о содѣйствіи Съѣзду имѣли благопріятный исходъ. Министръ Народнаго Просвѣщенія, Министръ Промышленности и Торговли и Начальникъ Главнаго Управленія военно-учебныхъ заведеній оказали Съѣзду и матеріальную, и моральную поддержку. Первая выразилась въ денежныхъ субсидіяхъ на изданіе Трудовъ Съѣзда (Министерство Народнаго Просвѣщенія—1000 р., Министерство Промышленности и Торговли—1000 р. и Главное Управленіе в.-уч. заведеній—500 р.), а моральная—въ освѣдомленіи учащаго персонала заведеній о задачахъ и цѣляхъ Съѣзда.

Успѣхомъ увѣнчались и сношенія Хозяйственной Комиссіи съ учебными заведеніями о помѣщеніяхъ для членовъ Съѣзда. Гимназія Императора Александра I-го, Гимназіи Мая и Лентовской и Высшіе Женскіе курсы дали помѣщеніе на 130 человѣкъ отчасти безплатно, а отчасти за ничтожную плату 2—3 р. для вознагражденія прислуги

и возмѣщенія расходовъ по освѣщенію; 1-й Кадетскій Корпусъ безплатно помѣстилъ у себя преподавателей военно-учебныхъ заведеній, пріѣхавшихъ на Съѣздъ; 2-й кадетскій Корпусъ и 3-я гимназія дали 215 кроватей.

Для встрѣчи прибывающихъ въ Петербургъ членовъ Съѣзда 26 и 27 декабря на вокзалахъ было установлено дежурство. Студенты Спб. Университета и Технологическаго Института (съ зеленой повязкой на рукавѣ) направляли съ вокзала на квартиры тѣхъ членовъ Съѣзда, которые заблаговременно заявили Комитету о своемъ желаніи воспользоваться помѣщеніями въ учебныхъ заведеніяхъ, и вообще давали указанія относительно квартиръ.

Что же касается до ходатайства о льготномъ проѣздѣ по желѣзнымъ дорогамъ, то на него 7-го октября предсѣдателемъ Организаціоннаго Комитета былъ полученъ слѣдующій отвѣтъ.

„Въ отвѣтъ на ходатайство отъ 19 сентября с. г., Департаментъ Желѣзнодорожныхъ Дѣлъ имѣетъ честь увѣдомить Ваше Превосходительство, что члены различныхъ съѣздовъ и конгрессовъ никакими льготами для проѣзда по желѣзнымъ дорогамъ не пользуются. Поэтому разрѣшеніе льготнаго проѣзда г.г. членовъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики вышло бы изъ предѣловъ, допускаемыхъ нынѣ Министерствомъ Финансовъ на практикѣ тарифныхъ льготъ и, являясь прецедентомъ, послужило бы основаніемъ для возбужденія ходатайствъ о предоставленіи аналогичныхъ льготъ, а удовлетвореніе всѣхъ таковыхъ ходатайствъ повело бы къ установленію новой категоріи тарифныхъ льготъ. Между тѣмъ, при обремененіи въ настоящее время желѣзнодорожной сѣти множествомъ всякаго рода льготныхъ перевозокъ, установленіе новыхъ разрядовъ тарифныхъ льготъ не представляется возможнымъ.

Въ виду изложеннаго и принимая во вниманіе, что нынѣ производится общій пересмотръ дѣйствующихъ льготныхъ тарифовъ, съ цѣлью возможнаго ихъ сокращенія, Департаментъ затрудняется расширять объемъ существующихъ льготныхъ перевозокъ путемъ допущенія льготнаго проѣзда г.г. членовъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“.

Въ работахъ *Выставочной Комиссіи* принимали участіе слушательницы Женскаго Педагогическаго Института, Высшихъ женскихъ Курсовъ и слушатели курсовъ для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадет-

скихъ корпусахъ. Комиссія разбилась на слѣдующія секціи.

1) Ариѳметика—наглядныя и лабораторныя пособія (И. Н. Кавунъ, В. И. Гартьеръ и М. А. Знаменскій).

2) Геометрія — наглядныя и лабораторныя пособія (А. Р. Кулишеръ и Д. Э. Теннеръ).

3) Графики—(М. Л. Франкъ и Н. А. Томилинъ).

4) „Лабораторный столъ"—(В. Р. Мрочекъ).

5) Каталогъ новѣйшей математической учебной литературы—(Ф. В. Филипповичъ).

Свѣдѣнія о выставкѣ будутъ приведены во 2-мъ томѣ „Трудовъ Съѣзда".

Съѣздъ засѣдалъ въ „Соляномъ Городкѣ", въ помѣщеніяхъ Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав. и *Императорскаго* Русскаго Техническаго Общества, предоставленныхъ ему безвозмездно.

Число членовъ Съѣзда достигло 1217 человѣкъ.

Организаціонный Комитетъ во время Съѣзда былъ пополненъ новыми членами, въ него вошли почетные предсѣдатели и почетные секретари Съѣзда. Кромѣ того, на засѣданія, посвященныя обсужденію резолюцій, подлежавшихъ утвержденію Съѣзда, были приглашены и тѣ члены Съѣзда, которые въ той или иной формѣ, напр. подачей отдѣльныхъ мнѣній, проявили желаніе принять активное участіе въ этой работѣ.

3-го и 4-го января состоялся рядъ экскурсій. Члены Съѣзда посѣтили: заводъ аэроплановъ „Гамаюнъ", Пулковскую обсерваторію, Городскую женскую школу имени П. А. Потѣхина, Зоологическій Музей Академіи Наукъ и Музей Императора Александра III-го. Экскурсіей въ Зоологическій Музей руководилъ Н. Я. Кузнецовъ, а въ Музей Императора Александра III-го П. А. Перелецкій.

Для изданія „Трудовъ Съѣзда" Организаціонный Комитетъ выдѣлилъ изъ своей среды Редакціонную Комиссію. Въ нее вошли: предсѣдатель Организаціоннаго Комитета (онъ же и предсѣдатель комиссіи), секретари общихъ собраній, предсѣдатели и секретари секцій и казначей.

Изданіе „Трудовъ" сильно осложнилось, какъ собира-

ніемъ матеріала, такъ и его большимъ объемомъ. Выпускаемый нынѣ I-й томъ, заключающій въ себѣ все то, что происходило въ общихъ собраніяхъ, составленъ секретарями В. Р. Мрочекомъ и Ф. В. Филипповичемъ подъ общей редакціей З. А. Макшеева.

Для обревизованія денежной отчетности составлена Комиссія изъ слѣдующихъ лицъ: проф. П. А. Некрасовъ (предсѣдатель), В. I. Шиффъ и С. А. Богомоловъ.

Денежный отчетъ будетъ приложенъ ко 2-му тому.

З. Макшеевъ.

Декабря 1912 г.

ПОЛОЖЕНІЕ

о 1-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподователей математики.

§ 1. Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики созывается Организаціоннымъ Комитетомъ.

§ 2. Организаціонный Комитетъ, подъ предсѣдательствомъ имъ выбраннаго лица, избираетъ товарищей предсѣдателя, секретарей и казначея, а также особое *Бюро Съѣзда*. При этомъ допускается кооптація новыхъ лицъ.

§ 3. Занятія Съѣзда продолжаются 8 дней,—съ 27 Декабря 1911 года по 3 Января 1912 года.

§ 4. Съѣздъ имѣетъ цѣлью обсужденіе слѣдующихъ вопросовъ:

1) психологическія основы обученія математикѣ (активность, наглядность, роль интуиціи и логики, и т. п.);
2) содержаніе курса школьной математики съ точекъ зрѣнія:
    а) современныхъ научныхъ тенденцій,
    б) современныхъ запросовъ жизни,
    в) современныхъ общепедагогическихъ воззрѣній;
3) согласованіе программъ математики средней школы съ программами низшихъ и высшихъ школъ;
4) вопросы методики школьной математики;
5) учебники и учебныя пособія;
6) историческіе и философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы;
7) рисованіе, лѣпка и ручной трудъ, какъ вспомогательныя средства при обученіи математикѣ;
8) подготовка учителей математики.

§ 5. При Съѣздѣ организуется выставка наглядныхъ пособій, діаграммъ и литературы, соотвѣтствующихъ программѣ Съѣзда. Для завѣдыванія выставкой Организаціонный Комитетъ избираетъ особыхъ лицъ.

§ 6. Подготовительныя къ Съѣзду работы ведутся Бюро, избирающемъ изъ своей среды предсѣдателя и секретарей.

§ 7. Въ случаѣ необходимости Организаціонный Комитетъ устраиваетъ секціи Съѣзда по отдѣльнымъ вопросамъ программы и избираетъ изъ своей среды предсѣдателя каждой секціи.

§ 8. Предсѣдателю секціи предоставляется право организовать бюро секціи.

§ 9. Членами Съѣзда могутъ быть: профессора и преподаватели математики и физики, представители ученыхъ обществъ и учебныхъ заведеній, а также лица, заявившія себя трудами въ области математики или педагогики. Всѣ прочія лица, интересующіяся программой Съѣзда, могутъ принимать участіе во всѣхъ работахъ Съѣзда, но безъ права рѣшающаго голоса.

§ 10. Лица, желающія участвовать въ Съѣздѣ въ качествѣ членовъ или гостей, заявляютъ объ этомъ Организаціонному Комитету и вносятъ одновременно денежный взносъ въ размѣрѣ трехъ рублей.

§ 11. Доклады по программѣ Съѣзда представляются въ Организаціонный Комитетъ по возможности не позже 1 Октября 1911 года, по адресу: Спб., Фонтанка 10, въ Канцелярію Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав.

§ 12. По открытіи Съѣзда новые доклады могутъ быть допущены не иначе, какъ съ разрѣшенія Предсѣдателя Съѣзда.

§ 13. Доклады на Съѣздѣ могутъ продолжаться не болѣе 1 часа; во время же обсужденія рѣчь каждаго лица не должна продолжаться болѣе 10 минутъ.

§ 14. Организаціонный Комитетъ, руководствуясь постановленіями какъ общихъ собраній Съѣзда, такъ и секціонныхъ засѣданій, вноситъ въ послѣднее общее собраніе рядъ резолюцій по вопросамъ, обсуждавшимся на Съѣздѣ, для голосованія.

§ 15. Резолюціи принимаются или отвергаются простымъ большинствомъ голосовъ.

ОТКРЫТІЕ СЪѢЗДА.

27 декабря.

Въ 12 час. дня въ большой аудиторіи Соляного Городка состоялось открытіе Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики.

Открывая Съѣздъ, предсѣдатель Организаціоннаго Комитета, *З. А. Макшеевъ* произнесъ слѣдующую рѣчь:

«Милостивые Государи и Милостивыя Государыни! — Удостоенный чести предсѣдательствовать въ Организаціонномъ Комитетѣ по устройству Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики, привѣтствую отъ лица Комитета настоящее Собраніе. Начинанія Организаціоннаго Комитета въ дѣлѣ созыва Съѣзда нашли широкій откликъ въ педагогическихъ кругахъ нашего обширнаго отечества и далеко превзошли по своимъ размѣрамъ скромныя ожиданія иниціаторовъ».

«Очевидно, что среди преподавателей математики глубоко, а, можетъ быть, и давно уже таилась потребность въ общеніи для обмѣна мнѣній; чувствовалась надобность въ коллективномъ умѣ, въ коллективномъ опытѣ для разрѣшенія многихъ волнующихъ учительскую среду вопросовъ преподаванія».

«Мы счастливы, что угадали эту потребность и пошли ей навстрѣчу. Нельзя не признать, что потребность эта явилась до извѣстной степени слѣдствіемъ нѣкоторой неудовлетворенности, нѣкотораго недовольства преподавателей своей работой. Но, Милостивые Государи, недовольство есть счастье мудреца. Человѣкъ сильный духомъ, а такимъ долженъ быть учитель, не боится признанія своихъ заблужденій или ошибокъ. Напро-

тивъ, именно въ этомъ признаніи черпается энергія и новыя силы для дальнѣйшей работы и борьбы съ трудностями, неизбѣжными во всякомъ серьезномъ дѣлѣ. Съ другой стороны надо помнить, что преподаватели въ дѣлѣ усовершенствованія своей работы заключены въ довольно тѣсныя рамки, изъ которыхъ они не могутъ выйти, пока новая педагогическая мысль не получитъ не только общаго, но и оффиціальнаго признанія. Будемъ надѣяться, что и въ этомъ отношеніи настоящій Съѣздъ не останется безрезультатнымъ. Въ этой надеждѣ меня укрѣпляетъ то сочувственное отношеніе, которое Съѣздъ встрѣтилъ въ высшихъ представителяхъ учебныхъ вѣдомствъ—Министрѣ Народнаго Просвѣщенія, Министрѣ Промышленности и Торговли и Начальникѣ Управленія Военно-учебныхъ завѣдѣній, своимъ авторитетомъ поддержавшихъ первые шаги Организаціоннаго Комитета. Съ пожеланіемъ вамъ успѣха въ предстоящихъ работахъ объявляю Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики открытымъ».

Вслѣдъ затѣмъ предсѣдателемъ Организаціоннаго Комитета *З. А. Макшеевымъ* были прочитаны привѣтственныя телеграммы Съѣзду:

«Привѣтствую Ваше Превосходительство съ открытіемъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики и прошу передать всѣмъ членамъ его сердечное пожеланіе успѣшныхъ занятій на пользу науки и школы.

Министръ Народнаго Просвѣщенія *Кассо*».

«Прошу Васъ принять и передать участникамъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики мои привѣтствія и пожеланія усиленной работы на пользу отечественнаго просвѣщенія.

Министръ Торговли и Промышленности *Тимашевъ*».

Затѣмъ были произнесены привѣтствія слѣдующими делегатами:

Полк. А. В. Полторацкій. «Привѣтствую Съѣздъ отъ Имени Августѣйшаго Генералъ-Инспектора В-Уч. Заведеній, *Великаю Князя Константина Константиновича*».

«ЕГО ИМПЕРАТОРСКОЕ ВЫСОЧЕСТВО серьезно боленъ и не покидаетъ постели. Беру на себя смѣлость привѣтство-

вать отъ Его Имени Съѣздъ, зная Его сочувствіе этому дѣлу».

В. Б. Струве. «Я имѣю честь, Милостивые Государи и Государыни, привѣтствовать Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики отъ имени Конференціи Константиновскаго Межевого Института въ Москвѣ. Московскій Межевой Институтъ есть одна изъ старѣйшихъ математическихъ школъ въ Россіи: онъ основанъ въ 1779 г. и, слѣдовательно, существуетъ уже больше ста лѣтъ.

Въ Институтѣ имѣются собственные общеобразовательные классы, изъ которыхъ воспитанники поступаютъ на старшіе-землемѣрные и инженерные курсы. Съ конца прошлаго столѣтія на эти высшіе курсы былъ открытъ доступъ также лицамъ, окончившимъ курсъ общеобразовательныхъ средне-учебныхъ заведеній.

Контингентъ слушателей высшихъ курсовъ состоитъ теперь изъ учениковъ-абитуріентовъ среднихъ школъ: реальныхъ училищъ, гимназій, кадетскихъ корпусовъ и коммерческихъ училищъ. Поэтому Межевой Институтъ глубоко заинтересованъ, какъ и прочія высшія школы Россіи, въ подготовкѣ абитуріентовъ среднихъ школъ. Привѣтствую Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики отъ имени Конференціи Константиновскаго Межевого Института и выражаю твердую увѣренность въ томъ, что труды Съѣзда явятся могучимъ толчкомъ въ развитіи и усовершенствованіи преподаванія математики».

С. И. Шохоръ-Троцкій. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Отъ имени Совѣта профессоровъ Психо-Неврологическаго Института имѣю честь привѣтствовать васъ и пожелать вамъ успѣшной работы на пользу школъ, какъ среднихъ, такъ и высшихъ, на пользу культуры и математическаго образованія въ Россіи. Желаю успѣха».

Г. П. Кузнецовъ. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Имѣю честь привѣтствовать васъ отъ имени Новочеркасскаго Математическаго Кружка. Новочеркасскій Математическій Кружокъ есть лишь одинъ изъ математическихъ кружковъ въ Россіи, а въ настоящее время мы имѣемъ въ лицѣ собравшихся не отдѣльный кружокъ, а Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики. Въ виду этого Новочеркас-

скій Математическій Кружокъ съ большимъ чувствомъ привѣтствуетъ васъ и желаетъ успѣха въ вашей плодотворной работѣ».

П. Д. Енько. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! При обученіи глухонѣмыхъ сказываются всѣ недостатки пріемовъ обученія, которые вносятъ гораздо болѣе вредныя послѣдствія, чѣмъ при обученіи въ обыкновенныхъ школахъ, поэтому ИМПЕРАТОРСКОЕ училище глухонѣмыхъ привѣтствуетъ Съѣздъ Преподавателей Математики и желаетъ, чтобы его занятія увѣнчались успѣхомъ».

З. А. Макшеевъ. «Какъ директоръ Педагогическаго Музея привѣтствую Съѣздъ. Здѣсь зародилась, окрѣпла и осуществилась мысль о Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики».

К. В. Трефнеръ. «Признавая Съѣздъ Преподавателей Математики фактомъ весьма важнымъ въ жизни русскихъ учителей и русской школы, Юрьевское Педагогическое Об-во горячо привѣтствуетъ Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики и выражаетъ пожеланія плодотворности трудовъ, чтобы оправдались тѣ надежды, которыя возлагаютъ на него съѣхавшіеся на Съѣздъ со всей обширной Россіи».

А. П. Нечаевъ. «Педагогическая Академія имѣетъ честь привѣтствовать Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики въ твердой увѣренности, что его труды оставятъ глубокій слѣдъ въ исторіи нашей школы».

А. Ф. Гатлихъ. «Господа, въ виду отсутствія предсѣдателя Московскаго Математическаго Кружка, проф. Млодзѣевскаго, позвольте въ качествѣ товарища предсѣдателя привѣтствовать Съѣздъ отъ Московскаго Математическаго Кружка, пожелать полнаго успѣха его занятіямъ и выразить твердую надежду, что за этимъ Съѣздомъ послѣдуетъ рядъ другихъ на пользу математическаго образованія у насъ на Руси и для объединенія представителей математической науки».

І. И. Чистяковъ. «Позвольте привѣтствовать Первый Съѣздъ отъ имени редакціи журнала, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Кружкомъ, «Математическое Образованіе». Нашъ молодой журналъ, первый нумеръ котораго вышелъ изъ печати только вчера, ставитъ себѣ задачей служеніе той же высокой цѣли, которую ставитъ себѣ и Первый

Съѣздъ Преподавателей Математики. Поэтому редакція желаетъ успѣха работамъ Съѣзда на благо русской математической науки и русскаго просвѣщенія».

К. К. Мазингъ. «Московское отдѣленіе ИМПЕРАТОРСКАГО Русскаго Техническаго Общества и Московская Постоянная Комиссія по техническому образованію привѣтствуетъ Съѣздъ. Хотя этотъ Съѣздъ главное вниманіе свое отдаетъ средней школѣ, а въ Комиссіи по техническому образованію находятъ себѣ образованіе главнымъ образомъ взрослые рабочіе, но крупица трудовъ этого Съѣзда принесетъ пользу и тѣмъ труженикамъ, которые служатъ дѣлу техническаго образованія, главная основа котораго математика. Привѣтствую Съѣздъ».

Послѣ рѣчей делегатовъ были прочитаны слѣдующія привѣтственныя телеграммы и письма:

«Отъ имени Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ привѣтствую I Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики. Директоръ *Чаплыгинъ*».

«Симбирскій Кадетскій Корпусъ привѣтствуетъ въ лицѣ Вашего Превосходительства Первый Съѣздъ Математиковъ—педагоговъ, выражая твердую увѣренность въ плодотворности работы Съѣзда. Генералъ *Шпигель*».

«Не откажите принять и передать сердечный привѣтъ Съѣзду отъ Вашего Сосѣда, ИМПЕРАТОРСКАГО Русскаго Техническаго Общества, и отъ меня лично и самыя душевныя пожеланія успѣха Съѣзду въ его трудахъ на благо русской школы и русской жизни...

... Правильная постановка преподаванія математики въ нашей школѣ, одного изъ главнѣйшихъ (если не главнѣйшаго) предметовъ для развитія духовнаго аппарата учащихся, безспорно отразится и на всемъ нашемъ жизненномъ укладѣ. При высокихъ свойствахъ духа русскаго народа, ему все же недостаетъ той — если можно такъ выразиться — математичности мышленія, которой отличается въ особенности англосаксонская раса. По широтѣ полета мысли, по окрыленности нашихъ идеаловъ, по стремленію познать все и обнять все мы едвали имѣемъ соперниковъ въ семьѣ народовъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ мы не можемъ похвалиться ни практическимъ строительствомъ жизни, ни послѣдовательностью въ проведеніи за-

думаннаго плана, ни систематичностью въ дѣйствіяхъ. Наша неподготовленность къ правильному счету и учету реальныхъ величинъ, къ измѣренію и взвѣшиванію ихъ, наше неумѣнье поставить на свое мѣсто каждый изъ факторовъ дѣйствительной жизни, координировать ихъ въ стройную систему для опредѣленной практической цѣли неблагопріятно отзывается на всемъ нашемъ бытѣ, на личномъ существованіи, семейномъ режимѣ, общественной и государственной работѣ.

Если строительнымъ камнемъ общежитія является отдѣльный (индивидуальный) человѣкъ, то пусть же школа подготовляетъ матеріалъ для лучшаго строительства, пусть она придаетъ мышленію ту математичность, безъ которой нельзя строить прочно и солидно.

Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго Общества *В. Ковалевскій.*»

«Привѣтствую отъ имени редакціи газеты «*Школа и Жизнь*» и своего личнаго, желаю Съѣзду плодотворной работы на благо нашей школы. *Фальборкъ*».

«Совѣтъ Петербургскаго Общества Народныхъ Университетовъ привѣтствуетъ собравшійся Первый Всероссійскій Съѣздъ Математиковъ, выражая увѣренность въ плодотворности его работъ на пользу просвѣщенія всѣхъ слоевъ населенія, не исключая и внѣшкольныхъ народныхъ, среди которыхъ распространяется дѣятельность Народнаго Университета. Товарищъ Предсѣдателя Совѣта *Дмитріевъ*, Предсѣдатель административнаго отдѣла *Неллисъ*, Секретарь Совѣта *Гранъ*».

По предложенію Организаціоннаго Комитета Предсѣдателемъ Съѣзда былъ избранъ членъ Государственнаго Совѣта профессоръ *А. В. Васильевъ.*

Проф. А. В. Васильевъ. «Глубоко благодарю за оказанную мнѣ честь, которая тѣмъ болѣе доставляетъ мнѣ удовольствіе, что въ теченіе моей университетской дѣятельности я пришелъ къ убѣжденію, что наши университеты безъ всякаго ущерба для главной цѣли могутъ служить и для не менѣе важной цѣли — подготовки къ педагогической дѣятельности тѣхъ воспитанниковъ, которые хотятъ посвятить себя этому трудному, но почтенному дѣлу. Мы стараемся образовывать по мѣрѣ силъ педагогическіе кружки, библіотеки,

студенческіе кружки, въ которыхъ разрабатываются педагогическіе вопросы на пользу образованія. Но это общеніе между молодыми педагогами—людьми только стремящимися еще посвятить себя педагогической дѣятельности представляется ничтожнымъ въ сравненіи съ тѣмъ общеніемъ, которое осуществляется здѣсь на этомъ съѣздѣ, гдѣ будетъ происходить общеніе между молодыми педагогами на первыхъ шагахъ ихъ дѣятельности и педагогами, посвятившими свою жизнь этой дѣятельности. Поэтому Всероссійскій Съѣздъ долженъ имѣть громадное значеніе въ математическомъ образованіи Россіи. Этому значенію содѣйствуетъ еще и то обстоятельство, что время, которое мы переживаемъ въ высшемъ образованіи, весьма знаменательно для математическаго образованія. Сначала образовалась комиссія по иниціативѣ нѣмецкихъ педагоговъ для разработки реформы математическаго образованія, труды которой вамъ извѣстны; она очень много сдѣлала въ этомъ направленіи. Эта комиссія расширилась и образовала международную комиссію для разработки вопроса о реформѣ математическаго преподаванія. Мы должны принять участіе въ этой работѣ, внести посильную лепту на пользу математическаго образованія въ нашемъ дорогомъ отечествѣ. Такова одна изъ цѣлей Съѣзда, создающаго общеніе математиковъ. Привѣтствую еще разъ, Милостивыя Государыни и Милостивые Государи, и искренно благодарю за высокую честь, которая мнѣ оказана».

Затѣмъ Съѣздъ избралъ: Товарищами Предсѣдателя—*З. А. Макшеева*, *М. Г. Попруженко*, *К. А. Поссе*, *С. Е. Савича*, *В. Ѳ. Кагана*, *Б. К. Млодзѣевскаго*, *В. Б. Струве*, *Д. М. Синцова* и *С. О. Шатуновскаго*, казначеемъ—*Д. Э. Теннера*, секретарями — *Д. М. Левитуса*, *В. Р. Мрочека* и *Ф. В. Филипповича*.

ПЕРВОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

27 декабря, 2 часа дня.

Въ предсѣдатели избранъ З. А. Макшеевъ.
Въ почетные секретари—И. И. Александровъ.

Математическое и философское преподаваніе въ средней школѣ.

Докладъ проф. А. В. Васильева. (СПБ.).

«Сложность, трудность и жгучесть всѣхъ вопросовъ, связанныхъ со школою, имѣетъ свои и соціологическія и психологическія основанія. Психологическое основаніе въ томъ, что средняя школа имѣетъ дѣло съ наиболѣе важнымъ и критическимъ періодомъ въ жизни человѣка, — въ томъ, что она беретъ изъ семьи ребенка и выпускаетъ въ общество юношу. Соціологическое основаніе трудности и жгучести вопросовъ, касающихся средней школы, въ томъ, что судьба и направленіе средней школы тѣсно связаны съ жизнью страны и съ борющимися въ ней стремленіями. Когда Петръ I, говоря словами поэта, поднялъ Россію на дыбы, онъ не могъ ограничиться одною существующею церковною школою; онъ создалъ цифирную школу съ преобладаніемъ математики, какъ учебнаго предмета. Великому перевороту, происходящему на нашихъ дняхъ на Востокѣ Азіи, предшествовало полное крушеніе устарѣлой системы образованія по книгамъ, написаннымъ тысячелѣтія тому назадъ, и введеніе «новаго» европейскаго образованія.

Эта двойная трудность вопроса о средней школѣ и является причиною постоянныхъ измѣненій во взглядахъ на цѣль и объемъ преподаванія различныхъ предметовъ.

Позвольте привести вамъ одинъ примѣръ, имѣющій интересъ новизны. Только въ 1905 г. вошли въ жизнь реформы

средняго образованія во Франціи, введшія такъ называемое enseignement moderne и ослабившія значеніе тѣхъ филологическихъ и литературныхъ предметовъ, которые во Франціи обозначаются однимъ словомъ «humanités». Не прошло и шести лѣтъ, какъ группа выдающихся французскихъ мыслителей—и въ числѣ ихъ геніальный математикъ Пуанкаре и талантливый романистъ Анатоль Франсъ—сочла нужнымъ обратить вниманіе на пониженіе умственнаго образованія французскаго юношества и высказалась за возвращеніе «humanités» ихъ стараго значенія.

Но тѣмъ не менѣе, при всѣхъ смѣнахъ взглядовъ и направленій въ исторіи средней школы въ разныхъ странахъ, значеніе математическаго образованія давно не подвергается уже сомнѣнію и роль этого образованія все болѣе и болѣе увеличивается. По мѣрѣ этого ростетъ и отвѣтственность преподавателей математики передъ своею страною и поэтому естественно стремленіе ихъ къ серьезному совмѣстному обсужденію вопросовъ математическаго преподаванія. Съѣздъ нашъ является однимъ изъ проявленій этого стремленія и интересъ, проявленный къ нему, о которомъ свидѣтельствуетъ и многочисленная аудиторія и количество докладовъ, служитъ ручательствомъ, что онъ принесетъ большую пользу дѣлу математическаго образованія въ Россіи. Этимъ будетъ оказана громадная услуга дѣлу образованія вообще, потому что роль математическаго преподаванія въ общей системѣ образованія неоспорима. Исключительными являются тѣ нападки на математическое образованіе, которымъ въ 1841 г. посвятилъ свою актовую рѣчь въ Московскомъ университетѣ подъ заглавіемъ «О вліяніи математическихъ наукъ на развитіе умственныхъ способностей» проф. Брашманъ, учитель Чебышева, который до конца берегъ, какъ святыню, портретъ своего учителя. Нападки шли отъ англійскаго философа Гамильтона (Hamilton), который доказывалъ (De l'études de mathématiques), что въ занятіяхъ математическими науками умъ нашъ не дѣйствователь, а зритель, что математика не только не возбуждаетъ и не увеличиваетъ способности къ мышленію, но даже ослабляетъ ее и дѣлаетъ неспособною къ постоянному напряженію, какого, требуетъ философія, другія науки и вопросы житейскіе, что,

наконецъ, математики ничего не знаютъ о причинахъ явленій; лишь философы раскрываютъ причины, лишь истины послѣднихъ суть согласіе мысли съ существующимъ.

За исключеніемъ этого послѣдняго обвиненія, которое можетъ быть признано математикою и обращено ею въ достоинство, всѣ остальныя обвиненія едва-ли кѣмъ-нибудь поддерживаются; не только здѣсь, въ кругу преподавателей математики, но и внѣ его уже не представляется необходимымъ, подобно профессорамъ Брашману и Бугаеву, доказывать, что математика есть могучее педагогическое орудіе. Еще менѣе можетъ подлежать сомнѣнію необходимость введенія въ преподаваніе математики, какъ могучаго орудія для рѣшенія вопросовъ науки теоретической и прикладной. Можетъ ли подлежать сомнѣнію необходимость включить въ систему общаго образованія хотя бы первоначальное знакомство съ наукою о пространственныхъ формахъ, съ тѣмъ методомъ, который, съ одной стороны, приводитъ къ возможности рѣшать вопросы объ устойчивости солнечной системы въ цѣломъ, о структурѣ и устойчивости колецъ Сатурна (изслѣдованія С. В. Ковалевской), а съ другой — приводитъ Джорджа Томсона (J. Tomson) къ объясненію періодической системы Д. И. Менделѣева (этой крупной заслуги русскаго генія передъ современной наукой) строеніемъ атома изъ корпускулъ или электроновъ. И тотъ же самый методъ привелъ къ установленію законовъ, проявляющихся въ массовыхъ явленіяхъ и примѣнилъ основанный на нихъ статистическій методъ, съ одной стороны, къ теоріи газовъ и структуры млечнаго пути, съ другой, — къ точному обоснованію мѣръ страхованія, этого важнаго орудія современной соціальной политики.

И педагогическое и научное значеніе математики вполнѣ оправдываютъ ея все болѣе и болѣе возрастающее значеніе въ системѣ средняго преподаванія. Но у математики, кромѣ ея логической строгости и сравнительной простоты, дѣлающей ее незамѣнимымъ педагогическимъ орудіемъ, кромѣ ея значенія для познанія явленій окружающаго насъ міра и для обладанія имъ, есть еще третья сторона: ея близкое соприкосновеніе, скажу, проникновеніе въ область наиболѣе общихъ вопросовъ человѣческой мысли.

Это философское значенiе математики цѣнится и признается съ глубокой древности: «Математика есть рукоятка философiи», говорилъ Ксенократъ; Платонъ отказывалъ въ человѣческомъ достоинствѣ людямъ, не знакомымъ съ геометрiей, а проникновенiе въ ея истины считалъ знанiемъ, наиболѣе необходимымъ для вождей народа. Въ эпоху возрожденiя Галилей говорилъ въ своемъ Saggiatore: «языкъ природы есть языкъ математики, а буквы этого языка—круги, треугольники и другiя математическiя фигуры».

Не разъ успѣхи математики оказывали чарующее, почти гипнотизирующее влiянiе на мысль человѣчества. При самомъ возникновенiи научной математики открытыя пиѳагорейскою школою первыя законности въ ученiи о цѣлыхъ числахъ, открытiе чиселъ совершенныхъ и дружественныхъ, открытiе ирращональностей оказали столь сильное влiянiе на метафизику Платона, что вся его теорiя идей есть лишь развитiе пиѳагоровскаго положенiя, согласно которому вещи всегда суть копiи чиселъ; и многiя мѣста его дiалоговъ и книги о Государствѣ полны отступленiями въ область свойствъ цѣлыхъ чиселъ и ирращональныхъ отрѣзковъ. Мы присутствуемъ въ настоящее время при проявленiи подобнаго же чарующаго влiянiя математическаго открытiя на общiе вопросы мiропониманiя. Самыя смѣлыя метафизическiя теорiи о тожествѣ пространства и времени являются слѣдствiемъ замѣчательнаго математическаго факта, открытаго Лоренцомъ (Lorentz), Эйнштейномъ (Einstein) и Минковскимъ (Minkowsky) и заключающагося въ томъ, что система Максвеллевскихъ уравненiй электродинамики не мѣняется отъ преобразованiя, связывающаго пространственныя координаты со временемъ, и что эти уравненiя принимаютъ вполнѣ симметричную форму относительно четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ, если эти перемѣнныя суть три пространственныя координаты, съ одной стороны,—время, умноженное на $\sqrt{-1}$ (мнимую единицу) съ другой.

Математика соприкасается съ философiею и съ ея частными доктринами: логикою, психологiею, гносеологiею и въ своихъ основанiяхъ, и въ своей конечной цѣли, и своимъ методомъ.

Она соприкасается съ гносеологіею и психологіею въ основаніяхъ. «Понятія о числѣ, пространствѣ, времени, говоритъ Кронекеръ, прежде чѣмъ сдѣлаться предметомъ чистой математики, должны быть развиваемы въ чистомъ полѣ философской» и, прибавлю я отъ себя, психофизіологической работы.

По отношенію къ нашимъ пространственнымъ ощущеніямъ психофизіологическій анализъ возникновенія далеко еще не законченъ; но онъ далъ уже многое, подтверждающее геніальную мысль, брошенную Лобачевскимъ: «Въ природѣ мы познаемъ, собственно, только движеніе, безъ котораго чувственныя впечатлѣнія невозможны. Всѣ прочія, понятія, напримѣръ, геометрическія, произведены нашимъ умомъ искусственно, будучи взяты въ свойствахъ движенія: а потому пространство само собой отдѣльно для насъ не существуетъ».

Не болѣе разработаны вопросы о времени и о генезисѣ понятія о цѣломъ числѣ (напримѣръ, вопросъ о взаимоотношеніи чиселъ порядковыхъ и количественныхъ). Математика соприкасается съ философіею природы по своей конечной цѣли. Гамильтонъ былъ правъ, указывая на то, что математики ничего не знаютъ о причинахъ явленій; философы же раскрываютъ причины. Математикъ, дѣйствительно, не задается цѣлью искать причины, а ограничивается тѣмъ, что ищетъ точныя функціональныя зависимости между измѣняющимися величинами. На той же точкѣ зрѣнія стоитъ и современная философская мысль. Она опредѣляетъ задачу философіи, говоря, что философія есть система научно-разработаннаго міровоззрѣнія, и относитъ къ области метафизики или морально обоснованной вѣры разысканіе причинъ явленій. (А. И. Введенскій. «Логика»).

Чистая математика пользуется дедуктивнымъ и символическимъ методами для изученія величинъ и чиселъ. Но этотъ дедуктивный методъ и употребленіе символовъ, какъ предчувствовалъ еще Лейбницъ (Leibnitz), не составляетъ принадлежности только ученія о величинахъ и числахъ. Въ 1854 г. Буль (Booll) издалъ свое сочиненіе «An investigation on the laws of thought», гдѣ тотъ же методъ былъ примѣненъ не къ величинамъ, а къ понятіямъ. И это расширеніе области

математическаго метода даетъ поводъ Пирсу (Peirce), Рёсселю (Russell) и другимъ подводить подъ понятіе о чистой математикѣ всѣ дедуктивныя разсужденія, пользующіяся употребленіемъ символовъ, считать датою рожденія чистой математики не времена Ѳалеса и Пиѳагора, а 1854 г. и давать математикѣ опредѣленіе науки, выводящей логическія слѣдствія изъ логическихъ посылокъ, а подчасъ и другое—чистая математика есть наука, которая не знаетъ того, о чемъ она говоритъ, и не знаетъ, вѣрно ли то, что она говоритъ. Грань, отдѣляющая математику отъ формальной логики, такимъ образомъ, почти исчезаетъ. Таковы связи между математикою и философіей. Насколько въ преподаваніи математики въ средней школѣ могутъ отразиться эти связи математики и философіи,—вотъ тотъ вопросъ, докладъ по которому Организаціонному Комитету благоугодно было поручить мнѣ. Я прошу извиненія за несовершенства моего доклада, такъ какъ вопросъ совсѣмъ не разработанъ въ дидактической литературѣ. Такъ, напримѣръ, его совсѣмъ почти не касается появившаяся въ прошломъ году дидактика Гёфлера (A. Höfler) или касается съ точки зрѣнія такъ называемой «Gegenstandstheorie». Пользуюсь случаемъ, чтобы выразить благодарность профессору Вернике (Брауншвейгъ), доставившему мнѣ возможность познакомиться съ тезисами книги, касающейся вопроса объ отношеніи между математическимъ и философскимъ преподаваніемъ, которую онъ предполагаетъ выпустить въ 1912 году.

Вопросъ о философскихъ элементахъ въ преподаваніи математики находится, конечно, въ тѣснѣйшей связи съ вопросомъ болѣе общимъ, съ вопросомъ о философскомъ элементѣ въ преподаваніи средней школы, съ вопросомъ о философскомъ преподаваніи вообще.

Какъ относятся къ нему въ разныхъ странахъ? Классическая гуманитарная (не классическая филологическая) школа ставила себѣ заслугой именно ознакомленіе съ философіей древнихъ мыслителей. Чтеніе діалоговъ Платона и рѣчей Цицерона знакомило съ основными вопросами философской мысли и съ ихъ рѣшеніемъ въ идеалистическомъ смыслѣ. До сихъ поръ въ англійскихъ школахъ философское образованіе

идетъ этимъ путемъ, и, напримѣръ, въ извѣстной школѣ Rugby, основанной педагогомъ Арнольдомъ (Arnold) и оказавшей большое вліяніе на постановку средняго образованія, orders или программы сочиненій заключаютъ въ себѣ длинный рядъ философскихъ темъ, относящихся къ спеціальнымъ вопросамъ психологіи и логики. И безъ спеціальнаго преподаванія философіи уваженіе къ философскому мышленію сочетается въ англійской интеллигенціи съ тою способностью къ интенсивной практической дѣятельности, которая составляетъ предметъ зависти для интеллигенціи другихъ странъ. Въ дни моего лѣтняго пребыванія въ Англіи рѣчь въ Оксфордѣ при открытіи курсовъ University extension, посвященная германской философіи, была произнесена выдающимся представителемъ гегеліанской философіи въ Англіи, ея военнымъ министромъ лордомъ Гальденомъ.

Въ другихъ странахъ (во Франціи и въ Австріи съ 1894 г. и у насъ со времени министерства Зенгера) преподаваніе философіи ведется въ видѣ особаго курса—«философская пропедевтика», заключающаго въ себѣ элементы логики и психологіи, знакомство съ теоріей познанія и съ важнѣйшими философскими системами.

Вопросъ о цѣлесообразности и объемѣ такого преподаванія труднѣйшихъ вопросовъ человѣческой мысли несозрѣвшимъ умамъ, при томъ подавленнымъ изученіемъ другихъ предметовъ, представляется весьма спорнымъ. Такъ напримѣръ, проф. Введенскій, съ большою убѣдительностью защищая въ своей «Логикѣ» преподаваніе логики, какъ руководства къ критикѣ мышленія «всѣмъ, кто хочетъ получить высшее образованіе, т. е. либо на всѣхъ факультетахъ, либо въ старшихъ классахъ гимназіи», высказывается противъ преподаванія психологіи, такъ какъ ея содержаніе еще не установилось и пока оно сводится къ безконечнымъ спорамъ по поводу почти каждаго ея положенія. «Преподаваніе психологіи въ гимназіяхъ въ видѣ особаго учебнаго предмета скорѣе приноситъ вредъ, чѣмъ пользу. Поэтому въ интересахъ общаго образованія гораздо полезнѣе упразднить въ гимназіяхъ психологію, какъ особый учебный предметъ и, прибавивъ одинъ урокъ къ двумъ существующимъ урокамъ логики, поручить ея преподавателю

ознакомить учениковъ съ отличіемъ психологической точки зрѣнія отъ логической, съ разнообразіемъ міра душевныхъ явленій, съ пріемами ихъ изученія».

Нѣсколько лѣтъ тому назадъ (въ 1894 г.) вопросъ о пользѣ философскаго преподаванія въ лицеяхъ и колледжахъ Франціи подвергся всестороннему обсужденію на страницахъ извѣстнаго французской школѣ «Revue bleue». Рѣзкое осужденіе преподаванія, которое пріучаетъ учениковъ къ «попугайному пустомельству», встрѣтило отпоръ со стороны видныхъ представителей философской мысли Франціи: Бутру (Boutroux) и Фулье (Foulliée).

Въ критическомъ возрастѣ, когда юноша въ первый разъ сталкивается съ запросами философской мысли, школа, если она хочетъ быть другомъ юноши, не можетъ не помочь ему посильно. Но и тѣхъ, для кого такіе вопросы не существуетъ, школа не можетъ оставить безъ ознакомленія съ высшими потребностями человѣческаго духа, толкнуть ихъ къ философіи. Только въ этомъ и видитъ Бутру цѣль философскаго преподаванія. «Обученіе философіи въ лицеяхъ есть посвященіе въ философское мышленіе. Законченнаго здѣсь не можетъ быть дано ничего; но законченное образованіе есть систематизація ограниченности».

Для тѣхъ, кто, несмотря на неудачи и недостатки практическаго выполненія идеально правильной мысли о необходимости философскаго преподаванія въ средней школѣ, будетъ считать его выполнимымъ, будетъ ясно, что вслѣдствіе громадной важности этой цѣли и другіе предметы должны быть въ той или въ другой стадіи, а особенно въ заключительной стадіи, поставлены въ тѣсную связь съ философскимъ преподаваніемъ и должны служить ему подспорьемъ. И преподаваніе исторіи должно освѣтить роль исторіи мысли вообще и философіи въ частности, не избѣгая столь важнаго вопроса о соотношеніи мысли и исторіи производственныхъ отношеній; и науки біологическія должны остановиться на вопросѣ о витализмѣ и аргументахъ pro и contra; и въ особенности изученіе литературы должно преслѣдовать тѣ этическія цѣли, которымъ она служила въ лицѣ своихъ лучшихъ представителей. Русская литература для многихъ поколѣній русскаго об-

щества является единственной учительницей философской мысли.

Сказанное выше о тѣсной связи математики съ философіей не оставляетъ сомнѣнія въ томъ, что и преподаваніе математики должно послужить той же высокой цѣли пробужденія интереса къ философскому мышленію.

Но за то большія трудности представляетъ рѣшеніе вопроса, на какихъ стадіяхъ и въ какой формѣ это должно осуществиться. Конечно, на всѣхъ ступеняхъ математическое преподаваніе должно служить цѣли развитія логическаго мышленія; но можетъ быть лучше всего, если оно будетъ достигать этого такъ, что ученикъ будетъ въ положеніи Мольеровскаго M-r Jourdain, который искренне удивился, когда ему сказали, что онъ говоритъ прозою. Сверхъ того у математическаго преподавателя есть свои другія задачи, важность которыхъ никто не можетъ отрицать: развитіе способности геометрическаго представленія, развитіе техники ариѳметическаго счета и алгебраическихъ вычисленій и т. п. При этихъ условіяхъ я колебался бы высказаться за то, чтобы философскій элементъ примѣшивался къ математическому преподаванію даже въ предпослѣднемъ классѣ. Пословица о погонѣ за двумя зайцами есть одна изъ наиболѣе поучительныхъ для педагога. Поэтому, если мы желаемъ и считаемъ возможнымъ ввести въ въ кругъ преподаванія средней школы ознакомленіе съ тѣми вопросами, которые можно назвать пограничными между математикою и философіею, то лучшее время для такого ознакомленія (несмотря на всѣ неудобства, связанныя съ годомъ, подготовляющимъ къ аттестату зрѣлости)—есть послѣдній годъ средней школы. Введеніе въ преподаваніе этого послѣдняго года вопросовъ, интересующихъ одинаково и математику и философію, соотвѣтствуетъ вполнѣ тому общему характеру, который должно имѣть преподаваніе математики въ этотъ послѣдній годъ.

Вопросъ о преподаваніи въ послѣднемъ учебномъ году представляется весьма важнымъ. Отъ постановки математическаго преподаванія въ этомъ послѣднемъ году зависитъ, если позволено такъ выразиться, общее математическое образованіе страны, т. е. уровень математическихъ знаній и по-

нимания значения математики у интеллигенціи страны; отъ нея же зависитъ уровень преподаванія въ тѣхъ школахъ, въ которыхъ продолжается математическое образованіе, т. е. на математическихъ факультетахъ университетовъ и въ высшихъ техническихъ школахъ. Въ чемъ же должна состоять главная цѣль преподаванія? Практика, конечно, здѣсь рѣзко разойдется съ теоріей. Практикъ скажетъ - въ приготовленіи ученика къ рѣшенію тѣхъ задачъ, которыя ему будутъ предложены на экзаменѣ зрѣлости и къ бойкому устному отвѣту. Теоретикъ скажетъ—къ тому, чтобы ученикъ вышелъ изъ средней школы, получивъ въ доступной ему формѣ пониманіе сущности и цѣли математики и прежде всего математики—какъ ученія о величинахъ и числахъ.

Сущность чистой математики останется скрытою для ученика, если для него останется неясною ея главная цѣль—замѣна прямыхъ и непосредственныхъ измѣреній косвенными и посредственными. Нужно выяснить ему, что къ этому сводится всякое приложеніе математики къ конкретнымъ явленіямъ, начиная съ опредѣленія Ѳалесомъ высоты недоступнаго предмета и кончая опредѣленіемъ отношенія между электрическимъ зарядомъ и массою корпускулъ по отклоненію ея, съ одной стороны, въ электрическомъ, а съ другой стороны, въ магнитномъ полѣ. Сущность математики останется непонятною если ученику не будетъ выяснено то, что такъ удачно названо Махомъ экономическимъ значеніемъ математики; экономическое значеніе формулъ, съ одной стороны, экономическое значеніе абстрактныхъ функцій, съ другой. Въ теоріи функцій, при невозможности ея достаточно полнаго изложенія въ средней школѣ, все вниманіе должно быть обращено на выясненіе значенія вопроса о ростѣ функцій и въ особенности вопроса о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

Выясненіе значенія чистой математики находится въ тѣсномъ соприкосновеніи съ основнымъ вопросомъ одного изъ отдѣловъ философской пропедевтики, а именно гносеологіи,—съ вопросомъ о томъ, какое значеніе возможно, возможно ли познаніе сущности явленій и ихъ причинъ или наше знаніе всегда будетъ только знаніемъ отношеній между ощущеніями (Махъ).

Но математика важна не только по своимъ приложеніямъ

къ конкретнымъ явленіямъ окружающаго насъ міра. Она представляетъ собою идеалъ систематизированнаго знанія, въ которомъ изъ небольшого числа логическихъ посылокъ выводятся путемъ логическаго мышленія всѣ заключающіеся въ нихъ implicite выводы. Такою системою является геометрія Эвклида, которая строится на основаніи аксіомъ сочетанія, порядка, конгруэнтности, аксіомы параллельности и аксіомы Архимеда. При изученіи ея по частямъ теряется та логическая связь, которая существуетъ во всемъ ученіи, и лучшимъ повтореніемъ геометріи будетъ выясненіе геометріи, какъ цѣлаго, построеннаго на небольшомъ числѣ аксіомъ. Послѣдующій за мною референтъ С. А. Богомоловъ подробно остановится на этомъ вопросѣ.

Такую же логическую связь необходимо указать и въ ариѳметикѣ и въ алгебрѣ или, объединяя ихъ однимъ терминомъ, въ общей ариѳметикѣ.

На порогѣ человѣческой культуры возникло понятіе объ абстрактномъ цѣломъ числѣ, постепенно шагъ за шагомъ оно расширялось. Овидіевское terque quaterque beati, недавно раздававшіеся въ Ургѣ клики въ честь 10000 лѣтъ живущаго царя Монголіи, свидѣтельствуютъ объ этапахъ, которые мало-по-малу привели къ понятію о безконечномъ рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, введенному въ науку въ псаммитѣ Архимеда.

Исходя изъ этого понятія, ариѳметика выводитъ, изучая обратныя операціи, понятія о добрыхъ, отрицательныхъ, несоизмѣримыхъ, комплексныхъ числахъ, подчиняя вновь вводимыя области чиселъ однимъ и тѣмъ же законамъ основныхъ операцій. Всѣ формулы алгебры составляютъ логическій выводъ изъ небольшого числа основныхъ положеній, и это должно быть показано ученику и должно приводить его къ вопросамъ логики, уясняя сущность дедукціи и дедуктивной научной системы. Но отдѣльные вопросы теоретической ариѳметики позволяютъ освѣтить для учениковъ и вопросъ объ индукціи, отличіе индукціи наукъ опытныхъ и наблюдательныхъ отъ индукціи математической (переходъ отъ n къ $n+1$).

Въ какой степени возможно ознакомленіе съ вопросами о происхожденіи геометрическихъ аксіомъ, съ различіемъ взглядовъ на то, слѣдуетъ ли теорію цѣлыхъ чиселъ обосновать на

числѣ кардинальномъ и на однозначномъ соотвѣтствіи или на идеѣ порядка и на числѣ порядковомъ—вотъ вопросъ, рѣшеніе котораго не можетъ быть общимъ для средней школы и всецѣло зависитъ отъ индивидуальныхъ свойствъ учителя и подготовки класса. Къ той же категоріи вопросовъ можно отнести вопросъ объ ознакомленіи учениковъ съ мемуарами Дедекинда (R. Dedekind), съ концепціями Кантора (Cantor). Еще менѣе можно разсчитывать на дѣятельность учителя математики въ ознакомленіи съ тѣми пограничными вопросами философіи и математики, о которыхъ шла рѣчь выше. Здѣсь возможна только совмѣстная работа учителя философской пропедевтики и учителя математики и одного учителя математики только въ томъ случаѣ, если на него возложено и преподаваніе философской пропедевтики.

Отъ соглашенія учителей математики и философской пропедевтики зависитъ, въ какой мѣрѣ и кѣмъ изъ нихъ будутъ разъяснены вопросъ объ апріорныхъ сужденіяхъ, вопросъ объ аналитическихъ и синтетическихъ сужденіяхъ, ученія о номинализмѣ и реализмѣ, такъ тѣсно связанныя съ двумя выше упомянутыми теоріями цѣлаго положительнаго числа, наконецъ, вопросъ объ абстрактныхъ понятіяхъ и основанія ученія о свойствахъ отношеній.

По моему мнѣнію, вопросъ о введеніи этихъ смежныхъ вопросовъ математики, съ одной стороны,—гносеологіи, психологіи и логики, съ другой стороны, тѣсно связанъ съ болѣе общимъ вопросомъ, который, какъ я знаю, представляется въ значительной степени «музыкою будущаго», вопросомъ объ индивидуализаціи преподаванія по крайней мѣрѣ на высшей ступени средней школы.

На необходимость такой индивидуализаціи одинаково настойчиво указываютъ и наиболѣе широкіе умы современнаго человѣчества и опытные педагоги. Вы знаете, вѣроятно, съ какою рѣзкостью относится къ современной нивеллирующей школѣ одинъ изъ знаменитѣйшихъ химиковъ нашего времени Вильгельмъ Оствальдъ, видя въ ней скорѣе аппаратъ для уничтоженія будущихъ оригинальныхъ мыслителей, чѣмъ для ихъ развитія. Гёфлеръ, дидактика котораго является плодомъ тридцатилѣтней педагогической дѣятельности въ одномъ

и томъ же учебномъ заведенiи (Терезiанумъ въ Вѣнѣ), съ великимъ сочувствiемъ относится къ мысли, высказанной въ Пруссiи. сдѣлать въ высшихъ классахъ гимназiи обязательными только минимальное число часовъ по каждому отдѣльному предмету. Дополнительные часы по тому или другому предмету избираются учениками сообразно ихъ способностямъ и дальнѣйшимъ планамъ. Въ менѣе радикальной формѣ Меранскiй учебный планъ настаиваетъ также «на свободѣ учителя при выборѣ вопросовъ, при ихъ методическомъ изложенiи, при распредѣленiи работъ между учениками».

Только при такой индивидуализацiи мы можемъ разсчитывать, что философскiя дополненiя къ курсу математики въ одной школѣ, математическiя иллюстрацiи вопросовъ гносеологiи и логики въ другой обратятся не въ сухую, непонятную и отталкивающую схоластику, а въ источникъ умственнаго наслажденiя и пробужденiя интереса къ вопросамъ наиболѣе труднымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ и привлекательнымъ, что они заставятъ учениковъ испытать то удивленiе, которое, по словамъ Сократа въ одномъ изъ дiалоговъ Платона, есть мать философiи, и будутъ содѣйствовать презрѣнiю къ невѣжеству и уваженiю къ человѣческой мысли. Въ стѣнахъ Казанскаго Университета 85 лѣтъ тому назадъ Н. И. Лобачевскiй восклицалъ въ своей рѣчи «О важнѣйшихъ предметахъ воспитанiя»: «Ничто такъ не стѣсняетъ потока жизни, какъ невѣжество; прямою, мертвою дорогою провожаетъ оно насъ отъ колыбели до могилы». Мыслитель, который въ настоящее время представляетъ живое соединенiе математическаго генiя и интенсивной и свѣжей философской мысли, Анри Пуанкаре, заканчиваетъ одну изъ своихъ книгъ прекрасными словами: «Исторiя земли показываетъ намъ, что жизнь есть только короткiй эпизодъ между двумя безконечными смертями, и въ этомъ эпизодѣ сознательная мысль есть только одно мгновенiе. Но это мгновенiе есть все».

Только тотъ народъ займетъ великое мѣсто въ исторiи мысли человѣчества, школа котораго на всѣхъ ея ступеняхъ отъ низшей до высшей, поставитъ себѣ цѣлью внушить своимъ ученикамъ то уваженiе къ мысли, которымъ проникнуты эти прекрасныя слова».

Тезисы.

I. Средняя школа должна поставить себѣ одною изъ цѣлей пробужденіе интереса къ серьезному философскому мышленію. Въ особенности этой цѣли долженъ служить послѣдній учебный годъ средней школы.

II. Математическое образованіе на всѣхъ своихъ ступеняхъ должно ставить себѣ цѣлью развитіе логическаго мышленія.

III. Математическое преподаваніе въ послѣдній учебный годъ средней школы должно поставить себѣ цѣлью:

1) выясненіе учащимся значенія математики для точнаго знанія и математическаго выраженія законовъ природы, и

2) научный ретроспективный взглядъ на систему элементарной математики (Меранскій учебный планъ 1905 г.).

IV. Соотвѣтственно указанной цѣли въ программѣ математики послѣдняго года средней школы должно быть обращено особенное вниманіе:

1) на выясеніе понятія о функціи и вопроса о ея ростѣ, и

3) на основанія ариѳметики, алгебры и геометріи.

V. При указанной постановкѣ преподаванія математики въ послѣдній годъ средней школы возможно и желательно установленіе тѣсной связи между курсами математики и философской пропедевтики.

VI. Основанія ариѳметики (ученіе о цѣломъ числѣ) въ въ особенности богаты вопросами поучительными и интересными съ точки зрѣнія философской пропедевтики.

Пренія по докладу проф. А. В. Васильева.

А. Г. Пичугинъ (Красноуфимскъ) высказалъ мысль, что прежде чѣмъ вводить философскую пропедевтику въ среднюю школу, надо позаботиться о введеніи кафедры этого предмета на физико-математическихъ факультетахъ россійскихъ университетовъ. Въ Западной Европѣ математики слушаютъ въ университетахъ философскую пропедевтику; у насъ же кафедра эта существуетъ только на историко филологическихъ факультетахъ. Наши математики, такимъ образомъ, по словамъ оппонента, не подготовлены къ преподаванію этого предмета въ средней школѣ, а потому—несмотря на всю желательность предлагаемой проф. Васильевымъ мѣры—она въ настоящее время осуществлена быть не можетъ.

В. И. Соколовъ, (Саратовъ), ссылаясь на свой личный опытъ, находитъ возможнымъ уже съ IV класса устанавливать связь логики съ математикой, какъ первую ступень для осуществленія предложенной докладчикомъ мѣры.

А. В. Полтарацкій (СПБ.) указалъ на рѣшающее значеніе для успѣха мѣропріятій, вырабатываемыхъ на Съѣздѣ *принципа индивидуализаціи*. Поэтому поводу онъ высказалъ слѣдующее: „Пока у насъ будетъ стремленіе нивеллировать всѣхъ по одной указкѣ, заставлять работать по одной программѣ, при самой лучшей программѣ можно не достигнуть большихъ результатовъ, но когда выпадаетъ больше свободы въ выборѣ и у преподавателей, и у воспитанниковъ, тѣмъ лучшіе будутъ результаты".

„Къ сожалѣнію, у насъ постоянно ссылаются на Германію и не знаютъ того, что дѣлается въ Скандинавіи. Въ Германіи теперь поднятъ вопросъ объ индивидуализаціи преподаванія, а въ Скандинавіи этотъ вопросъ уже давно удачно рѣшенъ. Въ Даніи выпускной классъ девяти-классной средней школы дѣлится на 4 параллельныхъ отдѣленія: классическое, новыхъ языковъ, реально-математическое и естественно-историческое. Ученикъ можетъ выбрать по своимъ силамъ и вкусамъ любой отдѣлъ. Въ Швеціи этотъ вопросъ рѣшается иначе: тамъ средняя школа дѣлится на двѣ линіи—реальную и латинскую. Въ старшихъ трехъ классахъ самая важная особенность въ томъ, что каждый ученикъ съ письменнаго согласія родителей имѣетъ право отказаться отъ одного или нѣсколькихъ любыхъ предметовъ, лишь бы общее число уроковъ, отъ которыхъ онъ отказывается, не превышало бы шести".

„Это не мѣшаетъ выпуску, но ученикъ предупреждается, что въ дальнѣйшемъ этотъ отказъ можетъ вызвать неудобства. Напримѣръ, реалистъ, отказавшійся отъ математики, не можетъ поступить на физико-математическій факультетъ или сдѣлаться артиллерійскимъ офицеромъ, если не сдастъ дополнительный экзаменъ".

„Кромѣ того, въ Швеціи Комитетъ имѣетъ право переводить изъ класса въ классъ, не назначая переэкзаменовокъ, даже съ неудовлетворительными баллами, если по другимъ предметамъ баллы хороши, а также Комитетъ рѣшаетъ вопросъ о выдачѣ при выпускныхъ экзаменахъ аттестата зрѣлости, несмотря на неудовлетворительные баллы по одному или двумъ предметамъ. Подробности можно найти въ моей статьѣ „Новый уставъ шведской средней школы" (Русская школа, декабрь, 1900 г). Всякая школа вообще, а средняя въ особенности должна воспитывать въ привычкѣ къ труду, но трудъ долженъ быть посиленъ и хорошо выполняемъ. Привычка работать безъ убѣжденія въ выполнимости работы только развращаетъ".

Г. П. Кузнецовъ (Новочеркаскъ) проситъ Съѣздъ обратить вниманіе на женскія гимназіи. По его словамъ въ женскихъ гимназіяхъ до нѣкоторой степени проводится индивидуализація, даже имѣется 8-й педагогическій классъ, въ которомъ имѣются спеціальности: словесность, исторія и др. Но въ женскихъ гимназіяхъ нѣтъ ни одного урока по философіи, ни одного урока логики, которая введена въ мужскихъ гимназіяхъ. Желательно было бы, чтобы Съѣздъ вынесъ резолюцію о введеніи преподаванія философіи въ 8-мъ классѣ женскихъ гимназій, это будетъ имѣть важное значеніе для ученицъ этого класа, какъ будущихъ учительницъ. Преподаваніе философской пропедевтики и логики, въ восьмомъ классѣ слѣдуетъ поручить преподавателю математики".

С. А. Неаполитанскій. (Варшава) „Раздѣляя мнѣніе многоуважаемагопрофессоравъ томъ, что необходимо ввести въ программу математики изученіе философскихъ элементовъ, я позволю себѣ подѣлиться скромнымъ опытомъ въ этомъ отношеніи. Въ прошломъ году съ учениками реальнаго училища 6-го и 7-го класса я устраивалъ бесѣды объ общихъ понятіяхъ физико-математическихъ наукъ. Я тѣмъ болѣе считалъ необходимымъ это сдѣлать, что ученики реальнаго училища совершенно лишены какихъ бы то ни было познаній по логикѣ, такъ какъ въ курсъ реальныхъ училищъ логика не входитъ совершенно".

„Я началъ съ краткой теоріи познанія, а потомъ перешелъ къ тому, какъ формируются науки индуктивныя, потомъ перешелъ къ разсмотрѣнію математики, какъ развивается понятіе о числѣ, какое мѣсто занимаетъ математика среди другихъ наукъ.

Эти бесѣды вызвали такой большой интересъ, возбуждалось столько разнообразныхъ вопросовъ, что я считаю, что подобныя бесѣды съ учениками, состоящія въ ознакомленіи учениковъ съ элементами философіи, есть уже вопросъ вполнѣ не только назрѣвшій, но и разрѣшимый".

Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія.

Докладъ С. А. Богомолова. (СПБ.)

«Мм. Гг.! Изъ всѣхъ математическихъ дисциплинъ геометрія съ древнѣйшихъ временъ считалась наиболѣе пригодной для общаго развитія человѣческаго ума. Чтобы не утомлять Васъ различными цитатами, я напомню лишь надпись на дверяхъ академіи Платона, которой запрещалось переступать порогъ всякому незнакомому съ геометріей. Этотъ призывъ философа, не остался безъ отклика, когда нѣсколько десятилѣтій спустя появилась первая система геометріи, твореніе исключительной важности въ исторіи науки—«Начала» Евклида, то тамъ не были забыты и чисто философскіе интересы. Евклидъ начинаетъ свою книгу введеніемъ, въ которомъ онъ пытается дать опредѣленія основныхъ геометрическихъ понятій и перечислить всѣ предпосылки дальнѣйшихъ построеній; при изложеніи каждой отдѣльной теоремы дѣло идетъ не только о ея доказательствѣ, но и о безукоризненномъ съ точки зрѣнія формальной логики расположеніи частей: за формулировкой самого предложенія слѣдуетъ установленіе того, что дано, и того, что требуется доказать; далѣе выполняется необходимое построеніе, приводится само доказательство, въ которомъ искомое предложеніе выставляется логическимъ слѣдствіемъ уже доказаннаго, и, наконецъ, заключеніе подчеркиваетъ еще разъ новое пріобрѣтеніе геометрическаго знанія. Въ Евклидѣ можно даже видѣть праотца современныхъ изслѣдованій о доказательной силѣ той или другой системы аксіомъ: первыя 28 предложеній 1-ой книги «Началъ» не опираются на знаменитый

V-ый постулатъ о параллеляхъ; авторъ какъ бы старался собрать здѣсь все, что можно установить безъ этой предпосылки. Эти замѣчанія позволяютъ намъ заключить, что Евклидъ смотрѣлъ на свою книгу не только какъ на введеніе въ геометрію, но и какъ на пропедевтику философіи въ платоновскомъ смыслѣ.

Выдвинутое въ такую далекую эпоху общеобразовательное значеніе геометріи признавалось всегда и вездѣ, гдѣ только заботились о развитіи человѣческаго ума; новѣйшее время внесло сюда еще нѣкоторыя новыя черты.

Стремясь къ гармоническому развитію всѣхъ человѣческихъ способностей, современная педагогика не могла упустить изъ виду, что занятіе геометрическими вопросами должно развивать нашу способность представлять себѣ пространственные объекты — пространственную интуицію, — и такимъ путемъ благотворно вліять на развитіе воображенія вообще.

Наконецъ, основа нашей культуры — техническій прогрессъ — требуетъ отъ каждаго ремесленника minimum'а геометрическихъ знаній и умѣнья распоряжаться ими; а для послѣдняго въ свою очередь необходимъ извѣстный minimum общаго развитія.

Что касается самихъ учащихся, то для нихъ геометрія является несомнѣнно наиболѣе усвояемымъ и интереснымъ отдѣломъ математики; преподаваніе геометріи облегчается и оживляется чертежами, призывомъ къ воображенію; въ геометрическихъ образахъ ученикъ видитъ идеальныя схемы предметовъ, съ которыми онъ сталкивается въ повседневной жизни; едва-ли найдется много дѣтей, у которыхъ при знакомствѣ съ шаромъ не всплыло-бы воспоминаніе объ апельсинѣ или арбузѣ.

Благодаря изложеннымъ причинамъ, геометрія имѣетъ выдающееся значеніе, какъ предметъ общаго и спеціально-математическаго образованія. Помимо сообщенія начальныхъ геометрическихъ свѣдѣній, мы видимъ цѣль ея преподаванія въ развитіи двухъ умственныхъ способностей: интуиціи пространства и логическаго мышленія.

Ни для кого не секретъ, что эта цѣль въ современной школѣ не осуществляется въ достаточной мѣрѣ. Недаромъ за

послѣднее время мы постоянно слышимъ о новыхъ методахъ преподаванія геометріи; недаромъ вопросъ о реформѣ преподаванія математики вышелъ уже за предѣлы національнаго обсужденія, и создалась международная комиссія, посвятившая себя изученію всѣхъ относящихся сюда матеріаловъ.

Да и каждый изъ насъ, имѣющій дѣло съ оканчивающими или окончившими среднее учебное заведеніе, убѣждается въ справедливости сказаннаго своей повседневной дѣятельностью; не говоря о невысокомъ вообще уровнѣ спеціальныхъ знаній, учащіеся поражають почти полнымъ отсутствіемъ пространственнаго воображенія; представить себѣ простѣйшій случай пересѣченія 2 обыкновенныхъ цилиндровъ подъ прямымъ угломъ—является для многихъ непосильнымъ требованіемъ. Что же касается задачи формировать умъ, выпускать молодыхъ людей съ привычкой и потребностью логическаго мышленія, чуткихъ ко всякому логическому диссонансу—задачи, осуществленіе которой возложено конечно не на одну геометрію,—то она оставалась всегда лишь pium desiderium средней школы.

Причины неудовлетворительной постановки средняго образованія у насъ многочисленны и разнообразны, обсужденіе ихъ должно происходить въ болѣе широкой аудиторіи; мы же, спеціалисты въ извѣстной области, поищемъ и спеціальныхъ причинъ, дѣйствующихъ наравнѣ съ общими.

Возможный главный пунктъ обычнаго изложенія геометріи намѣчается самъ собою, если вспомнить указанную нами двоякую цѣль ея преподаванія; въ самомъ дѣлѣ, если мы ставимъ себѣ двѣ различныхъ цѣли: развитіе интуиціи пространства съ одной стороны и логическаго мышленія съ другой, то невольно является вопросъ, находятся ли эти различныя стороны дѣла въ должной гармоніи; отведено ли въ процессѣ построенія геометріи должное мѣсто различнымъ методологическимъ моментамъ—интуиціи и логикѣ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, бросимъ критическій взглядъ на обычное обоснованіе геометріи; такъ какъ при этомъ мы не желаемъ критиковать составителя того или другого учебника, а ставимъ себѣ цѣлью разсмотрѣть извѣстное

направленіе весьма почтенной давности, то, минуя современныя руководства, обратимся къ ихъ первоисточнику — Евклиду.

«Началамъ» предпослано собраніе опредѣленій, постулатовъ, аксіомъ; по мысли автора это должно быть единственной предпосылкой всего послѣдующаго; такъ что предложенія геометріи должны явиться логическими слѣдствіями изъ небольшого числа основныхъ, принятыхъ безъ доказательства. Великая заслуга Евклида и заключается въ созданіи такого идеала; что касается его осуществленія, то лишь самое послѣднее время сдѣлало нѣкоторые успѣхи въ этомъ направленіи. Первое предложеніе «Началъ» ставитъ задачу: «На данной конечной прямой AB построить равносторонній треугольникъ». Для ея рѣшенія дѣлается построеніе 2 круговъ съ центрами въ A и B и съ общимъ радіусомъ AB; точка ихъ пересѣченія C соединяется съ A и B; затѣмъ доказывается, что $\triangle$ ABC будетъ искомымъ. Каждый шагъ въ этомъ разсужденіи можно обосновать ссылкой на соотвѣтствующій постулатъ или аксіому за однимъ бросающимся въ глаза исключеніемъ: существованіе точки C пересѣченія нашихъ окружностей не вытекаетъ изъ предпосылокъ, перечисленныхъ во введеніи; конечно, чертежъ съ полной очевидностью свидѣтельствуетъ, что упомянутые круги пересѣкаются; но также очевидно, что 2 точки опредѣляютъ прямую, что равныя порознь третьему равны между собой; однако послѣднія утвержденія внесены въ число предпосылокъ геометріи, и Евклидъ открыто на нихъ ссылается. Такимъ образомъ, мы видимъ здѣсь пробѣлъ: разсужденіе можно оправдать лишь призывомъ къ непосредственной интуиціи; такъ что результатъ уже 1-го предложенія нельзя считать логическимъ слѣдствіемъ принциповъ. Переходя къ 4-му предложенію, гдѣ идетъ рѣчь объ одномъ случаѣ равенства треугольниковъ, мы встрѣчаемся съ методомъ положенія, которымъ Евклидъ пользуется въ планиметріи всего 2 раза; авторъ какъ-бы чувствовалъ, что здѣсь не все обстоитъ благополучно, и по возможности избѣгалъ его примѣненія. Дѣйствительно для этого имѣются вѣскія основанія.

Примѣняя методъ положенія, мы вводимъ въ геометрію чуждое ей понятіе движенія и даемъ поводъ для весьма серьз-

ныхъ сомнѣній. Въ самомъ дѣлѣ, обладать движеніемъ можетъ лишь нѣчто матеріальное; геометрическія точки не матеріальны, онѣ суть извѣстныя мѣста въ пространствѣ; и допустить ихъ движеніе—значитъ допустить абсурдное положеніе, что различныя мѣста въ пространствѣ могутъ совпадать, т. е. быть однимъ и тѣмъ же мѣстомъ. Такъ что, если мы все-таки желаемъ налагать наши треугольники одинъ на другой, то необходимо мыслить ихъ матеріальными и притомъ абсолютно твердыми. Но существуютъ-ли вообще абсолютно-твердыя тѣла? и развѣ не устанавливаемъ мы самое понятіе такого тѣла на разработанномъ уже ученіи о равенствѣ геометрическихъ образовъ? Въ такомъ случаѣ является опасность попасть въ безъисходный заколдованный кругъ. Между тѣмъ доказать 4-ое предложеніе Евклида или какое-либо другое, ему равносильное, безъ помощи движенія нельзя; исходъ можетъ быть только одинъ: принять одно изъ такихъ предложеній безъ доказательства, въ качествѣ основной предпосылки геометріи, и отсюда уже вывести логически все ученіе о конгруэнціи, т. е. о геометрическомъ равенствѣ.

Есть впрочемъ возможность обосновать геометрію на понятіи движенія, какъ это дѣлаютъ не безъ успѣха нѣкоторые современные ученые; однако эти авторы понимаютъ подъ движеніемъ нѣчто совершенно отличное отъ того, что связывается съ этимъ понятіемъ въ механикѣ и въ повседневной жизни; именно, они оставляютъ въ сторонѣ самый процессъ движенія, непрерывный переходъ изъ одного положенія въ другое съ теченіемъ времени, а довольствуются лишь разсмотрѣніемъ начальной и конечной стадіи его, движеніе здѣсь является ничѣмъ инымъ, какъ извѣстнаго рода геометрическимъ преобразованіемъ, благодаря которому нѣкоторой фигурѣ въ одной части пространства соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная фигура въ другой; при этомъ и каждой точкѣ первой соотвѣтствуетъ опредѣленная точка послѣдней. Вотъ если поставить во главѣ такое понятіе движенія, если далѣе открыто постулировать всѣ важнѣйшія свойства этого преобразованія, которыя такимъ образомъ дадутъ содержаніе аксіомамъ, — то на этомъ основаніи можно построить систему геометріи, безукоризненную съ точки зрѣнія формальной логики. Указаннымъ

путемъ идетъ Піери; взявъ въ качествѣ основныхъ понятія: «точка» и «движеніе», онъ формулируетъ въ аксіомахъ свойства нужнаго ему движенія; точно также въ «Опытѣ обоснованія Евклидовой геометріи» пр.-доц. Кагана мы встрѣчаемся съ движеніемъ, которое опредѣляется, какъ извѣстное «сопряженіе» или отображеніе пространства въ самомъ себѣ. Нѣкоторые считаютъ подобный способъ обоснованія геометріи наиболѣе подходящимъ и для средней школы; мы позволяемъ себѣ въ этомъ сомнѣваться. Ввести въ курсъ геометріи движеніе такимъ, какимъ оно извѣстно всякому школьнику, мѣшаютъ формально-логическія соображенія; вводить же подъ именемъ движенія группу геометрическихъ преобразованій, принципіально отличную отъ движенія механическаго,—не значитъ ли это породить безнадежную путаницу въ умахъ учащихся, еще не привыкшихъ къ тонкимъ логическимъ различіямъ?

Вéрнемся однако къ Евклиду. Можно указать еще одинъ существенный пробѣлъ въ системѣ его предпосылокъ; мы имѣемъ въ виду отсутствіе аксіомъ расположенія, опредѣляющихъ понятіе «между» и позволяющихъ приписать извѣстный порядокъ точкамъ прямой, плоскости и пространства. Обычно вопросы подобнаго рода—напр.: лежитъ ли такая-то точка прямой между двумя данными, или нѣтъ—рѣшаются на основаніи чертежа, т. е. призывомъ къ непосредственной интуиціи; неудобство этого ясно: невѣрный чертежъ можетъ повести къ невѣрному заключенію, извѣстный порадоксъ, что всѣ треугольники равнобедренны, основанъ именно на чертежѣ, грѣшащемъ противъ понятія «между». Другое дѣло, если въ нашемъ распоряженіи будетъ необходимое число аксіомъ, исчерпывающихъ свойства указаннаго понятія; основываясь на нихъ и оставаясь конечно въ согласіи съ логикой, мы будемъ застрахованы отъ невѣрныхъ выводовъ. Примѣромъ такихъ аксіомъ, на необходимость которыхъ впервые указалъ Пашъ въ 1882 г., можетъ служить одна изъ аксіомъ Гильберта: изъ трехъ точекъ прямой одна и только одна лежитъ между двумя другими.

На изложеніи Евклида мы видимъ, что обычный способъ построенія геометріи прибѣгаетъ къ двумъ пріемамъ, существенно различнымъ съ методологической точки зрѣнія; именно, онъ пользуется и непосредственной интуиціей пространства и

логической дедукціей на основаніи аксіомъ. Не въ этой ли двойственности заключается причина не совсѣмъ удовлетворительныхъ результатовъ, достигаемыхъ преподаваніемъ геометріи? Намъ представляется вполнѣ допустимымъ, что постоянные призывы къ интуиціи, нарушая логическій ходъ мысли, мѣшаютъ осуществленію той цѣли нашей науки, которую ставили такъ высоко Платонъ и Евклидъ; съ другой стороны, выдвиганіе на первый планъ по примѣру великаго геометра древности логической стороны, хотя и не вполнѣ выдержанное, не даетъ достаточнаго простора нашей способности пространственнаго воображенія и задерживаетъ ея развитіе. Такимъ образомъ, преслѣдуя одновременно двѣ различныхъ цѣли, мы не достигаемъ ни одной и тѣмъ лишній разъ подтверждаемъ извѣстную пословицу.

Естественно напрашивается выводъ: нужно отъ этой двойственности такъ или иначе избавиться; нужно, чтобы построеніе геометріи было проникнуто единствомъ метода. Вопросъ о томъ, удастся ли тогда сохранить двоякую цѣль преподаванія геометріи и не придется ли для этого вмѣсто одного курса ввести два, мы оставимъ пока въ сторонѣ. Прежде всего мы должны сравнить оба возможныхъ метода обоснованія геометріи съ точки зрѣнія достовѣрности получаемыхъ результатовъ. Вѣдь если наша интуиція пространства въ состояніи доставлять намъ предложенія, обладающія всей достовѣрностью логическаго вывода, то вполнѣ естественно будетъ предпочесть непосредственное познаваніе истины обходному пути дискурсивнаго мышленія. И такой путь вовсе бы не былъ чѣмъ-то совершенно новымъ въ геометріи: есть свидѣтельства, что индусы, сдѣлавъ необходимыя построенія, все доказательство заключали въ одномъ словѣ «смотри!» Въ сравнительно недавнее время Шопенгауэръ всей силой своего генія обрушился на обычное доказательство пиѳагоровой теоремы и требовалъ, чтобы оно было замѣнено чертежомъ, который, разлагая квадраты на части, дѣлалъ бы очевиднымъ съ перваго взгляда, что одинъ изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ другихъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ необходимости подвергнуть критическому разсмотрѣнію нашу способность воспринимать свойства пространственныхъ образовъ.

Оставаясь въ области элементарной геометріи, можно уже указать факты, говорящіе не въ пользу непогрѣшимости интуиціи. Возможность подобныхъ фигуръ, т. е. измѣненія размѣровъ тѣла при полномъ сохраненіи его формы принадлежитъ къ числу наиболѣе очевидныхъ положеній, доставляемыхъ намъ интуиціей пространства; исходя изъ этого замѣчанія, Валлисъ предлагалъ даже замѣнить аксіому параллелей принципомъ возможности подобія, какъ болѣе очевиднымъ.

Возьмемъ далѣе неограниченную прямую; возможность продолжать ее въ обѣ стороны до безконечности въ связи съ существеннымъ свойствомъ прямой—неизмѣнностью направленія—какъ будто-бы заставляетъ нась приписать прямой 2 различныя безконечно-удаленныя точки. Между тѣмъ оба эти факта—существованіе подобныхъ фигуръ и двѣ различныхъ точки въ безконечности у прямой—оказываются логически несогласуемыми.

Въ самомъ дѣлѣ, геометрія Евклида имѣетъ подобныя фигуры; но прямой этой геометріи приходится приписать лишь одну точку на безконечности, если вообще говорить о такихъ точкахъ. Напомнимъ основанія указаннаго заключенія, которое поражаетъ всякаго учащагося, впервые узнающаго объ этомъ. Изъ аналитической геометріи извѣстно, что координаты любой точки прямой можно выразить формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

откуда видно, что x и y обращаются въ ∞ лишь при одномъ значеніи $\lambda = -1$. Къ тому же выводу приводитъ и изслѣдованіе пересѣченія 2 прямыхъ, изъ которыхъ одна вращается вокругъ нѣкоторой точки: каждому положенію прямой, за исключеніемъ случая параллельности, отвѣчаетъ одна опредѣленная точка; такъ что если и для этого исключительнаго случая допустимъ существованіе особой—безконечно удаленной—точки, то вполнѣ цѣлесообразно будетъ принять ея единственность у всякой прямой. Наоборотъ, въ неевклидовой геометріи, именно въ системѣ Лобачевскаго, вполнѣ естественно приписать прямой 2 точки на безконечности соотвѣтственно двумъ параллелямъ, которыя можно провести изъ данной точки къ данной прямой; но въ этой геометріи нѣтъ подобныхъ фигуръ: равен-

ство 3 угловъ достаточно для равенства треугольниковъ. Можно, конечно, возразить, что указанный вопросъ усложняется привходящей идеей безконечности; но въ теоріи параллелей—весьма существенной части нашей науки—нельзя совсѣмъ обойтись безъ этой идеи.

Мы только что упомянули о неевклидовой геометріи; самая возможность ея нанесла весьма тяжелый ударъ вѣрѣ въ непреложность интуиціи. Что касается ученія о пространствѣ и изслѣдованія его свойствъ геометріей, то долгое время господствовали и частью господствуютъ теперь воззрѣнія Канта. По ученію кёнигсбергскаго философа, пространство есть необходимая форма нашего внѣшняго чувства, въ которую неизбѣжно отливается все то, что оно намъ доставляетъ; форма эта не только не создается опытомъ, но она его обуславливаетъ: внѣ пространства, опытъ невозможенъ. Разсматривая нашу интуицію пространства, мы непосредственно постигаемъ ея основныя свойства, напр. трехмѣрность, и строимъ такимъ образомъ систему геометріи; сила послѣдней, ея всеобщность и необходимость въ томъ именно и заключаются, что она лишь формулируетъ законы пространства, которые, благодаря его апріорности неизбѣжно осуществляются въ опытѣ; явленіе внѣшняго міра, которое опровергало-бы геометрію, есть абсурдъ. Мы готовы подписаться подъ этимъ, по скольку дѣло идетъ не о построеніи отвлеченной системы геометріи—что собственно и является единственной задачей чистой математики—а объ изученіи свойствъ реальнаго пространства нашего ежедневнаго опыта.

Однако возникаетъ сомнѣніе, доступно ли для насъ въ полной мѣрѣ исчерпывающая и безошибочная формулировка свойствъ пространства, какъ необходимой формы нашего ума; и это сомнѣніе получаетъ значительную поддержку со стороны неевклидовыхъ системъ (Лобачевскаго и Римана). Три системы геометріи исходятъ изъ совершенно различныхъ предпосылокъ: у Евклида имѣется одна параллельная къ данной прямой черезъ данную точку, у Лобачевскаго—двѣ, у Римана—ни одной; ихъ результаты существенно различны (вспомнимъ хотя-бы о подобныхъ фигурахъ); между тѣмъ оказывается, что распоряжаясь извѣстной постоянной, входящей въ формулы неевкли-

довыхъ геометрій, можно удовлетворить всѣмъ требованіямъ опыта при помощи любой изъ этихъ системъ. Кромѣ того, въ настоящее время доказано, что неевклидовы геометріи въ той же мѣрѣ застрахованы отъ внутреннихъ противорѣчій, какъ и геометрія Евклида, т. е. различныя допущенія о параллеляхъ одинаково согласуемы съ другими основными свойствами пространства, о которыхъ свидѣтельствуетъ наша интуиція. Эти факты подрываютъ нашу вѣру въ способность интуиціи безошибочно и полно устанавливать соотношенія между геометрическими образами.

Недостаточность интуиціи для чистой математики вообще и геометріи въ частности становится еще убѣдительнѣе, если обратиться къ высшимъ отраслямъ нашей науки. Проф. Клейнъ неоднократно возвращается къ этому вопросу въ своихъ лекціяхъ; непрерывная кривая Вейерштрасса, не имѣющая опредѣленной касательной ни въ одной изъ своихъ точекъ; кривая Пеано, заполняющая площадь квадрата; нѣкоторыя построенія изъ близкой геттингенскому ученому теоріи автоморфныхъ функцій,—все это даетъ ему поводъ подчеркнуть полное безсиліе интуиціи тамъ, гдѣ съ помощью строго установленныхъ опредѣленій и логически связанныхъ разсужденій мы остаемся полными господами положенія.

Слѣдовательно, если мы строимъ геометрію не какъ опытную науку, а въ качествѣ особаго отдѣла чистой математики, то мы не имѣемъ права отводить интуиціи рѣшающее значеніе въ разсужденіяхъ. Это не значитъ, конечно, совсѣмъ изгнать изъ геометріи интуицію и съ нею вмѣстѣ чертежи; послѣдніе останутся всегда могучимъ подспорьемъ, и не только при открытіи новыхъ истинъ; веденіе доказательства значительно облегчается наличіемъ чертежа, который позволяетъ все время имѣть передъ глазами объекты разсужденія, обозрѣвать сдѣланныя уже построенія и закрѣплять новыя. Не надо только основываться исключительно на чертежѣ, всякій шагъ въ доказательствѣ долженъ быть логическимъ слѣдствіемъ или одной изъ нашихъ аксіомъ, или ранѣе доказанной теоремы. Словомъ, мы можемъ смѣло допустить интуицію къ участію въ построеніи геометріи, но только съ совѣщательнымъ голосомъ.

Мы подошли здѣсь къ основному положенію современныхъ

ученій объ основаніяхъ геометріи. Послѣднія ведутъ начало отъ работъ комментаторовъ Евклида и въ теченіи 2000 лѣтъ исключительно имѣли своимъ предметомъ теорію параллелей. Построеніе неевклидовыхъ системъ рѣшило эту частную задачу, установивъ независимость V-го постулата отъ другихъ предпосылокъ геометріи. Вполнѣ естественно было поставить подобный вопросъ и по отношенію къ другимъ аксіомамъ, изслѣдовать ихъ взаимную независимость, согласуемость и вообще подвергнуть всю систему геометріи логико-философскому анализу. Такъ возникла современная аксіоматика.

Слѣдуя итальянскому геометру Бонола, можно всѣ работы объ основаніяхъ геометріи раздѣлить на 3 большихъ группы въ зависимости отъ ихъ направленія. Первое направленіе можно обозначить терминомъ «метрико-дифференціальное»; оно кладетъ въ основу понятіе движенія, какъ непрерывной группы преобразованій, и пользуется ученіемъ о такихъ группахъ, разработаннымъ главнымъ образомъ С. Ли; сюда же надо отнести изслѣдованія, исходящія изъ выраженія для элемента линіи или поверхности и основанныя на общемъ ученіи о линіяхъ и поверхностяхъ. Кромѣ С. Ли съ работами въ этой области связаны имена Римана, Гельмгольца, Бельтрами. Мы видимъ, что здѣсь дѣло идетъ о высшихъ отрасляхъ математическаго анализа. Второе направленіе можно охарактеризовать словомъ «проективное»; оно начинаетъ съ обоснованія проективной геометріи; послѣдняя отвлекается отъ всякихъ метрическихъ свойствъ пространственныхъ образовъ и вращается въ кругѣ идей о положеніи ихъ, каковы: взаимная принадлежность точки и прямой, расположеніе точекъ на прямой и т. п. Затѣмъ вводятся т.-наз. проективныя координаты, и съ помощью общихъ теорій аналитической геометріи даются понятія о разстояніи и углахъ, при чемъ существенную роль играетъ особымъ образомъ выбранное коническое сѣченіе. Легко видѣть, что и эти изслѣдованія, съ которыми связаны имена Кэли и Клейна, стоятъ довольно далеко отъ начальнаго математическаго образованія. Наконецъ третье направленіе, извѣстное подъ именемъ «элементарнаго», всецѣло находится въ кругѣ идей и методовъ элементарной геометріи; здѣсь необходимо назвать работы Паша, Пеано, Веронезе, Гильберта и мно-

гихъ другихъ. Несмотря на огромное принципіальное значеніе изслѣдованій въ первыхъ двухъ направленіяхъ, только послѣднее можно привести въ непосредственное соприкосновеніе съ работой средней школы; только его выводы и методы могутъ непосредственно вліять на преподаваніе началъ геометріи. На этомъ основаніи въ дальнѣйшемъ мы и будемъ имѣть въ виду главнымъ образомъ элементарное направленіе въ современной аксіоматикѣ.

Первая заповѣдь этой науки гласитъ, что всякое понятіе, которое мы встрѣчаемъ въ системѣ геометріи, или должно быть принято за первоначальное, или опредѣлено черезъ другія, выбранныя уже въ качествѣ первоначальныхъ; точно такъ же всякое предложеніе или принимается открыто безъ доказательства, т. е. входитъ въ число аксіомъ, или доказывается по правиламъ формальной логики на основаніи аксіомъ. Выборъ основныхъ понятій и предложеній до извѣстной степени произволенъ; здѣсь нужно руководствоваться цѣлесообразностью: наши предпосылки прежде всего должны быть достаточны для построенія геометріи. Опредѣленіе первоначальныхъ понятій является безсмысленнымъ требованіемъ; то, что встрѣчаемъ иногда подъ этимъ именемъ у Евклида и его послѣдователей, въ сущности вовсе не опредѣленія, а описанія основныхъ геометрическихъ образовъ [напр., «точка есть то, что не имѣетъ частей», «линія есть длина безъ ширины», и т. п.]; эти описанія, помимо нѣкоторыхъ возбуждаемыхъ ими сомнѣній, совершенно излишни для геометріи. Авторы (въ томъ числѣ и Евклидъ), ставящіе ихъ во главу системы, на самомъ дѣлѣ нигдѣ ими не пользуются при дѣйствительномъ изложеніи геометріи; за то буквально на каждомъ шагу необходимо ссылаться на аксіомы или постулаты, выражающіе основныя соотношенія между нашими первоначальными понятіями, ихъ важнѣйшія свойства, или утверждающіе существованіе извѣстныхъ объектовъ. Такимъ образомъ, съ точки зрѣнія формальной логики первоначальныя понятія лишены всякаго содержанія, за исключеніемъ того, которое вкладывается въ нихъ аксіомами; такая точка зрѣнія вполнѣ достаточна для геометріи, какъ отвлеченной дедуктивной науки, какъ отрасли чистой математики. Если же подъ геометріей понимать науку о на-

шемъ реальномъ пространствѣ—и это будетъ одно изъ множества возможныхъ истолкованій указанной отвлеченной системы,—то каждому его непосредственная интуиція подскажетъ, какіе именно пространственные образы понимаются подъ точкой, прямою, плоскостью. Помимо логической необходимости указаннаго воззрѣнія на первоначальныя понятія, послѣднее является и въ высшей степени плодотворнымъ съ точки зрѣнія экономіи мысли. Въ самомъ дѣлѣ, если мы не вкладываемъ въ основныя понятія никакого иного содержанія кромѣ того, которое утверждается въ аксіомахъ, то очевидно всякая система объектовъ, удовлетворяющихъ въ качествѣ основныхъ понятій нашимъ предпосылкамъ, удовлетворитъ и всѣмъ слѣдствіямъ изъ нихъ; непремѣннымъ условіемъ является исполненіе требованія, чтобы всѣ выводы имѣли своимъ единственнымъ основаніемъ явно формулированныя аксіомы и, кромѣ того, лишь законы общей логики. При соблюденіи этого правила возможно почти безграничное использованіе разъ совершенной кропотливой работы строго дедуктивнаго построенія геометріи; возможно различное истолкованіе полученныхъ результатовъ. Одинъ примѣръ такого использованія извѣстенъ сравнительно давно и получилъ права особаго метода; мы имѣемъ въ виду законъ взаимности въ проективной геометріи. Дѣло въ томъ, что предпосылки этой науки допускаютъ перестановку словъ «точка» и «плоскость» одного на мѣсто другого; при чемъ другія понятія, какъ-то: «прямая», «лежать на» и нѣкоторыя иныя, остаются безъ измѣненія. Наприм.: «3 точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ плоскость» и «3 плоскости, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ точку (ихъ пересѣченія)»; «2 точки опредѣляютъ прямую» и «2 плоскости опредѣляютъ прямую». Надо замѣтить, что эти предложенія можно получить изъ обычныхъ, подверженныхъ извѣстнымъ исключеніямъ (2 плоскости не всегда пересѣкаются) путемъ введенія т.-наз. идеальныхъ элементовъ. Если при обоснованіи проективной геометріи мы строго держались аксіомъ, то возможность указанной перестановки понятій въ аксіомахъ дѣлаетъ ее законной и во всѣхъ выводахъ изъ нихъ; въ этомъ и заключается законъ взаимности. Такимъ образомъ, подъ отвлеченнымъ основнымъ понятіемъ «точка» проективной гео-

метріи можно съ одинаковымъ правомъ понимать какъ обыкновенную интуитивную точку, такъ и обыкновенную плоскость. Законъ взаимности извѣстенъ давно, но только современныя воззрѣнія на методъ геометріи ставятъ его внѣ всякихъ сомнѣній, если же мы при построеніи нашей науки будемъ отводить рѣшающее значеніе интуиціи пространства, то его положеніе становится шаткимъ: съ интуитивной точки зрѣнія плоскость и точка существенно различны, и доказанное для одной нельзя переносить безъ дальнѣйшихъ разсужденій на другую. Прекрасные примѣры подобныхъ истолкованій основныхъ понятій можно найти въ энциклопедіи элементарной геометріи Веберъ-Вельштейна; тамъ указанъ общій методъ, позволяющій любую теорему обычной геометріи истолковать, какъ предложеніе, выражающее извѣстное свойство весьма сложныхъ пространственныхъ образовъ.

Выше было указано, что при формулировкѣ предпосылокъ геометріи допустимъ нѣкоторый произволъ; однако, кромѣ условія цѣлесообразности, послѣдній ограниченъ и другими требованіями. Прежде всего система аксіомъ должна быть свободной отъ внутреннихъ противорѣчій; мы должны быть увѣрены, что при построеніи геометріи никогда не натолкнемся на два факта, одинаково вытекающіе изъ всей совокупности аксіомъ и противорѣчащіе другъ другу; другими словами мы должны доказать согласуемость нашихъ предпосылокъ.

Пока этого не сдѣлано, не исключена возможность, что рано или поздно наша система окажется несостоятельной; только изслѣдованія подобнаго рода могли установить право на существованіе неевклидовыхъ системъ; что же касается евклидовой, то до послѣдняго времени она опиралась лишь на право давности. Доказательства согласуемости той или другой системы аксіомъ можно достигнуть, указавъ совокупность реально существующихъ объектовъ, въ которой выполняется наша система; а то, что существуетъ, по основному принципу нашей познавательной способности, не можетъ заключать въ себѣ противорѣчія. Въ частности согласуемость предпосылокъ евклидовой геометріи доказывается построеніемъ особаго аналитическаго пространства; условимся подъ «точкой» понимать совокупность 3 вещественныхъ чиселъ (x, y, z)

взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Само собою разумѣется, что при этомъ надо совершенно отрѣшиться отъ знанія аналитической геометріи: вѣдь дѣло идетъ о началахъ всякой геометріи. Тогда подъ «плоскостью» условимся понимать не что иное, какъ собраніе такихъ троекъ (x, y, z), которыя удовлетворяютъ уравненію $Ax+By+Cz+D=O$, при постоянныхъ A, B, C, D. Основываясь на данныхъ алгебры, нетрудно доказать, что 3 «точки» вообще опредѣляютъ «плоскость», ибо 3-хъ уравненій вообще достаточно для опредѣленія отношенія 3 коэффиціентовъ къ 4-му, и т. д. Подробности можно найти у Гильберта и въ упомянутой уже книгѣ Веберъ-Вельштейна. Такимъ образомъ, согласуемость геометрическихъ аксіомъ устанавливается при помощи уже существующей совокупности вещественныхъ чиселъ; изъ послѣдней выбираются такія ариѳметическія комбинаціи, которыя при надлежащемъ истолкованіи основныхъ дѣйствій надъ ними выполняютъ всѣ предпосылки геометріи. Въ конечномъ счетѣ дѣло сводится къ согласуемости аксіомъ ариѳметики. Невозможность противорѣчія въ евклидовой системѣ будетъ доказана лишь при условіи, что таковое невозможно въ ученіи о вещественныхъ числахъ. Геометрія можетъ поставить здѣсь точку; замѣтимъ, что аксіомы ариѳметики нѣкоторые изслѣдователи послѣдняго времени (Пеано, Фреге, Рёссель) сводятъ къ законамъ общей или т.-наз. символической логики.

Помимо согласуемости, основныя предложенія должны обладать взаимной независимостью; дѣйствительно, если какое-либо изъ нихъ можно доказать при помощи другихъ, то ему не мѣсто среди аксіомъ; оно должно быть помѣщено въ число теоремъ. Для доказательства независимости предложенія A отъ предложеній B, C, D... нужно установить, что отрицаніе A совмѣстимо съ утвержденіемъ остальныхъ; т. е. нужно доказать согласуемость системы не—A, B, C, D... На основаніи предыдущаго мы должны найти такую систему объектовъ, которые удовлетворяютъ аксіомамъ B, C, D... и не удовлетворяютъ A; такимъ именно, путемъ устанавливается независимость постулата параллелей отъ другихъ предпосылокъ геометріи, другими словами, возможность неевклидовой геометріи.

Изслѣдованія независимости или зависимости извѣстнаго

предложенія отъ опредѣленной системы постулатовъ составляютъ существенную часть книги Гильберта; въ указанной уже работѣ прив.-доц. Каганъ даетъ исчерпывающее доказательство взаимной независимости его постулатовъ.

Мы указали два условія, которымъ должны удовлетворять предпосылки геометріи; однако къ ихъ нарушенію приходится отнестись совершенно различнымъ образомъ. Тогда какъ невыполненіе перваго—согласуемости—лишаетъ данную систему аксіомъ всякой цѣны, отсутствіе второго—независимости—дѣлаетъ ее лишь менѣе выработанной, менѣе изящной; но, конечно, она можетъ служить основаніемъ для геометріи. Вслѣдствіе этого, нѣкоторые авторы (Энрикесъ), имѣя въ виду школьные курсы, даже предпочитаютъ класть въ основу систему предпосылокъ, завѣдомо не удовлетворяющихъ требованію независимости; они считаютъ цѣлесообразнымъ почерпнуть какъ можно болѣе простѣйшихъ фактовъ изъ интуиціи пространства; а далѣе уже соблюдаютъ полную строгость изложенія, не дѣлая болѣе призывовъ къ непосредственному возрѣнію. Несомнѣнно такое построеніе геометріи, если его и нельзя считать совершеннымъ, ничѣмъ однако не грѣшитъ противъ правила, чтобы выводы были логическими слѣдствіями предпосылокъ.

Послѣ этихъ общихъ замѣчаній посмотримъ, какъ въ дѣйствительности происходитъ выборъ основныхъ понятій и предложеній. Что касается первыхъ, то все зависитъ отъ того, насколько далеко идетъ авторъ въ логическомъ анализѣ основъ геометріи; исходя изъ этого соображенія, можно намѣтить 3 различныхъ теченія.

Первое, наиболѣе послѣдовательное въ процессѣ расчлененія геометрическихъ понятій, принимаетъ въ качествѣ первоначальнаго лишь одно понятіе «точки». Валенъ удовлетворенно замѣчаетъ, что дальше итти некуда, такъ какъ въ геометріи должно быть по крайней мѣрѣ одно особое понятіе, присущее исключительно ей; однако Рёссель въ согласіи съ тѣмъ, что мы выше говорили о неопредѣленности смысла основныхъ понятій, утверждаетъ, что «точка» даже и не особое понятіе, характерное для геометріи, а просто названіе тѣхъ элементовъ изъ которыхъ она строитъ свои образы; а понимать подъ этимъ,

словомъ можно въ сущности все, что угодно. При такомъ допущеніи прямая и плоскость опредѣляются, какъ извѣстные классы точекъ посредствомъ указанія ихъ свойствъ, выдѣляющихъ названныя совокупности изъ множества всѣхъ точекъ. Вообще всѣ понятія геометріи, по мнѣнію Рёсселя, виднаго сторонника новой логико-математической школы, сводятся въ концѣ концовъ къ понятіямъ общей логики, какъ-то: классъ, принадлежность индивидуума къ своему классу, соотношеніе (relation) и др.; среди нашихъ элементовъ — «точекъ» — мы устанавливаемъ при помощи системы аксіомъ тѣ или другія соотношенія, опредѣляя ихъ въ основныхъ понятіяхъ логики; отъ характера этихъ соотношеній зависятъ свойства геометрической системы; наприм., мы можемъ прійти къ геометріи евклидовой или неевклидовой. Для Рёсселя чистая математика есть не что иное, какъ спеціальная глава изъ логики; въ частности геометрія есть изученіе рядовъ двухъ и болѣе измѣреній, тогда какъ элементарный анализъ имѣетъ дѣло съ вещественными числами—рядомъ одного измѣренія (комплексныя числа приходится отнести въ область геометріи).

Если же разсматривать геометрію, какъ науку о дѣйствительномъ пространствѣ, то это уже будетъ наука прикладная.

Второе теченіе выражаетъ болѣе умѣренные взгляды: на ряду съ точкой оно допускаетъ еще какое-либо понятіе въ качествѣ основного; таковымъ является или движеніе (Піери), или соотношеніе порядка между 3 точками (Вебленъ), или прямолинейный отрѣзокъ (Пеано, Пашъ); мы не ставимъ себѣ здѣсь цѣлью полное перечисленіе всевозможныхъ случаевъ, а желаемъ лишь дать общую характеристику различныхъ направленій. Само собою понятно, что это второе теченіе ведетъ къ обоснованію геометріи болѣе короткимъ путемъ, цѣною быть можетъ, логическаго изящества перваго; имѣется попытка Тиме написать учебникъ геометріи, исходя изъ понятій точки и отрѣзка. Наконецъ третье теченіе, не заботясь вовсе о minimum'ѣ первоначальныхъ понятій, подходитъ еще ближе къ элементамъ; сюда надо отнести работы Гильберта и Амальди, при чемъ послѣдній въ сотрудничествѣ съ Энрикесомъ написалъ даже учебникъ геометріи. Названные авторы берутъ въ качествѣ основныхъ всѣ понятія, которыя являются важнѣйшими въ

геометрическомъ мышленіи и которымъ соотвѣтствуютъ простѣйшіе интуитивные образы; таковы понятія точки, прямой, плоскости; сюда же относятся иногда и нѣкоторыя соотношенія между ними, наприм.: параллельность, конгруэнтность и др.—Что касается системы аксіомъ, то она въ значительной мѣрѣ обусловливается выборомъ основныхъ понятій; въ согласіи съ нашимъ стремленіемъ все ближе и ближе подходить къ школьному курсу геометріи, остановимся на только что указанной системѣ первоначальныхъ понятій и посмотримъ, каковы тѣ основныя предложенія, которыя единственно и опредѣляютъ ихъ содержаніе и дѣлаютъ возможными всѣ послѣдующіе выводы. По примѣру Гильберта аксіомы дѣлятся на 5 группъ; каждая постулируетъ однородные факты нашей пространственной интуиціи, стоящіе другъ съ другомъ въ тѣсной связи и образующіе такимъ образомъ нѣчто цѣльное. Вотъ онѣ:

1) Аксіомы сочетанія (или принадлежности), устанавливающія связь между понятіями точекъ, прямыхъ и плоскостей; наприм.: двѣ различныя точки всегда опредѣляютъ прямую. Сюда же относятся аксіомы, утверждающія существованіе извѣстныхъ объектовъ, въ родѣ слѣдующей: имѣется по крайней мѣрѣ 4 точки, не лежащія въ одной плоскости.

2) Аксіомы расположенія, которыя, если имѣть въ виду евклидову геометрію, опредѣляютъ свойства прямой, какъ линіи неограниченной и незамкнутой. Гильбертъ достигаетъ этого, постулируя свойства понятія «между» (см. выше), что позволяетъ сейчасъ же ввести понятіе отрѣзка. Здѣсь нужно установить и свойства плоскости—поверхности безграничной и безконечной, для сказанной цѣли обычно служитъ постулатъ Паша, утверждающій, что прямая, пересѣкающая одну изъ сторонъ треугольника той же плоскости, пересѣкаютъ и другую.

3) Аксіомы конгруенціи, относительно которыхъ Гильбертъ утверждаетъ, что онѣ опредѣляютъ также понятіе движенія; дѣйствительно, движеніе въ его геометрическомъ смыслѣ можно опредѣлить, какъ однозначное преобразованіе, при которомъ соотвѣтственныя фигуры конгруэнтны; впрочемъ, въ этомъ пунктѣ нашему автору недостаетъ различія между образами конгруэнтными и симметричными. Гильбертъ принимаетъ и конгруэнцію отрѣзковъ, и конгруэнцію угловъ за основныя

понятія; послѣдняя аксіома этой группы связываетъ ихъ и въ сущности представляетъ 4-ое предложеніе Евклида, для доказательства котораго былъ примѣненъ методъ наложенія.

4) Аксіома параллелей, которая исключаетъ геометрію Лобачевскаго; что же касается системы Римана, то она уже исключена аксіомами 2-ой группы, опредѣлившими прямую, какъ линію безконечную.

5) Аксіома непрерывности, обычно формулируемая по Дедекинду; Гильбертъ поступаетъ здѣсь совершенно оригинальнымъ образомъ, раздѣливъ ее на двѣ: аксіому измѣренія, или архимедову и аксіому законченности. Аксіома послѣдней группы сообщаетъ пространству свойства непрерывности, которыя грубымъ образомъ воспринимаются и нашей интуиціей. По этому поводу замѣтимъ, что, когда мы желаемъ построить систему геометріи, отвѣчающей пространству нашего опыта, то при выборѣ аксіомъ мы несомнѣнно руководствуемся интуиціей, которая свидѣтельствуетъ объ основныхъ свойствахъ этого пространства; но только то, что въ интуиціи мы постигаемъ въ частной и подчасъ лишь приближенной формѣ, въ аксіомахъ высказывается общимъ и безусловнымъ образомъ. Клейнъ неоднократно повторяетъ въ своихъ лекціяхъ, что аксіомы суть идеализированныя данныя непосредственной интуиціи; выводы изъ нихъ, т. е. вся геометрія, осуществляется въ реальномъ пространствѣ съ точностью, зависящей отъ точности, съ которой осуществляются въ немъ ея предпосылки. Возвращаясь къ аксіомѣ непрерывности, укажемъ, что въ собраніи статей, посвященныхъ вопросамъ геометріи и вышедшихъ подъ общей редакціей Энрикеса, имѣется статья Витали подъ заглавіемъ: «О приложеніяхъ постулата непрерывности въ элементарной геометріи»; въ ней авторъ устанавливаетъ, что этотъ постулатъ, не говоря уже о теоріи измѣренія, необходимъ для доказательства многихъ теоремъ обычнаго курса, какъ наприм.: теорема о пересѣченіи прямой съ окружностью, пересѣченіе 2 круговъ и др.; послѣднее предложеніе, какъ мы видѣли, принимается у Евклида за очевидное.

Таковы исходныя точки геометріи; что касается до метода дальнѣйшихъ построеній, то на основаніи соображеній, изложенныхъ въ предшествующей части нашего реферата, та-

ковымъ должна служить дедукція по правиламъ формальной логики; единственной основой всѣхъ выводовъ должна быть выбранная система аксіомъ и общіе законы логики. Интуиціи, а съ нею вмѣстѣ и чертежамъ отводится лишь подчиненная и вспомогательная роль. Указанная характеристика метода геометріи относится къ нему постольку, поскольку мы говоримъ о доказательствѣ уже найденныхъ истинъ и приведеніи ихъ въ систему; если же рѣчь идетъ объ открытіи новыхъ, то вышеприведенныя соображенія теряютъ силу, ибо вообще логики открытій нѣтъ; послѣднія суть дѣло индивидуальнаго таланта, и всѣ средства—даже грубо эмпирическія—хороши при условіи, что они ведутъ къ цѣли. Но доказательство открытаго должно происходить способомъ, общезначимымъ и общеобязательнымъ для всѣхъ людей; единая логика вступаетъ здѣсь въ свои права. Поэтому, когда методъ геометріи опредѣляютъ, какъ производство умственныхъ опытовъ надъ имѣющимся матеріаломъ—подобное опредѣленіе мы находимъ у Гёльдера,—то здѣсь дѣло идетъ скорѣе объ открытіи новыхъ истинъ, чѣмъ о ихъ доказательствѣ.

Сказанное о геометріи примѣнимо ко всякой другой дедуктивной наукѣ. Издавна старались подмѣтить въ методѣ первой черты, присущія исключительно ей, и таковыя видѣли въ различныхъ построеніяхъ, которыя мы совершаемъ почти при всякомъ геометрическомъ изслѣдованіи. Особенно сильно подчеркнуто это замѣчаніе у Канта, что вполнѣ соотвѣтствуетъ его воззрѣніямъ на методъ математики вообще. Въ «критикѣ чистаго разума», сравнивая возможное поведеніе философа и математика, которымъ предложенъ вопросъ о суммѣ угловъ треугольника, онъ говоритъ: «... (геометръ) продолжаетъ одну изъ сторонъ своего треугольника и получаетъ два смежные угла, сумма которыхъ равна двумъ прямымъ угламъ. Внѣшній изъ этихъ угловъ онъ дѣлитъ, проводя линію, параллельную противоположной сторонѣ треугольника, и замѣчаетъ, что отсюда получается внѣшній смежный уголъ, равный внутреннему и т. д.». Продолженіе стороны треугольника и проведеніе параллели—дѣйствительно существенные моменты извѣстнаго доказательства, что сумма угловъ треугольника равна $2d$. Важность построеній признаютъ и современные изслѣдователи на-

чалъ геометріи, но только они вносятъ сюда нѣкоторыя поправки. Во-первыхъ—относительно самого слова «построеніе»; когда мы на бумагѣ или на доскѣ строимъ прямую линію, то мы вступаемъ здѣсь уже въ физико-механическую область и получаемъ лишь несовершенную копію геометрическаго образа. Чистой геометріи до всего этого нѣтъ никакого дѣла; ея объекты существуютъ независимо отъ ихъ физическаго воспроизведенія; ихъ существованіе постулируется системой аксіомъ: нѣкоторыя изъ послѣднихъ прямо устанавливаютъ бытіе извѣстныхъ точекъ, прямыхъ, плоскостей, другія — косвенно, говоря объ опредѣлимости однихъ образовъ съ помощью другихъ; такъ что, приступая къ какому-либо изслѣдованію, мы уже имѣемъ въ своемъ распоряженіи все безчисленное множество основныхъ геометрическихъ образовъ. «Мы мыслимъ», говоритъ Гильбертъ: «три различныхъ системы объектовъ; объекты 1-ой мы называемъ точками, объекты 2-ой—прямыми и объекты 3-ей—плоскостями; мы мыслимъ точки, прямыя, плоскости въ извѣстныхъ отношеніяхъ другъ къ другу»; и не строить эти образы намъ нужно, а лишь остановить наше вниманіе, выбрать тотъ изъ нихъ, который выдѣляется изъ множества отдѣльныхъ по опредѣленному правилу. Такъ, наприм., въ предыдущемъ доказательствѣ изъ безчисленной совокупности прямыхъ мы выбираемъ двѣ: одну, которая опредѣляется двумя данными точками—вершинами треугольника, а другую, опредѣляемую точкой и условіемъ параллельности. Изложеннымъ образомъ понимается теперь терминъ «построеніе». Во-вторыхъ, современные изслѣдователи полагаютъ, что прежде всего должна быть доказана возможность «построенія»; другими словами, должно быть установлено, что требуемые образы дѣйствительно существуютъ на основаніи аксіомъ, и во многихъ случаяхъ нужно еще поставить внѣ сомнѣнія ихъ единственность. Въ приведенной выше теоремѣ это предварительное изслѣдованіе исчерпывается ссылкой на основное предложеніе о прямой и на аксіому параллелей; въ другихъ случаяхъ требуется болѣе длинное разсужденіе. Что это требованіе не пустой педантизмъ, видно хотя-бы изъ слѣдующаго примѣра. Возьмемъ теорему, что у двухъ различныхъ треугольниковъ съ соотвѣтственно равными углами (т. е. подобныхъ) сходственныя стороны про-

порціональны; въ основѣ ея очевидно лежитъ допущеніе, что такіе треугольники возможны; вотъ это-то допущеніе и должно доказать на основаніи аксіомъ, и необходимость доказательства намъ станетъ ясной, если мы вспомнимъ, что въ геометріи Лобачевскаго такихъ треугольниковъ не существуетъ.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ убѣжденію, что геометрія развивается благодаря ряду все новыхъ и новыхъ допущеній и выводу слѣдствій изъ нихъ; въ этомъ заключается специфическая особенность ея метода. Нужно различать только допущенія двоякаго рода: основныя, дающія содержаніе аксіомамъ, и производныя, лежащія въ основѣ всякой теоремы; тогда какъ первыя являются исходной точкой всякаго доказательства, вторыя должны быть каждый разъ доказаны на основаніи первыхъ.

Познакомившись съ общими положеніями современной аксіоматики, возвратимся къ тѣмъ вопросамъ, которые у насъ возникли въ связи съ критикой преподаванія геометріи.

Мы видѣли, что настоящее положеніе дѣла неудовлетворительно, потому что тамъ нѣтъ единства метода: доказательства частью основаны на интуиціи, частью на логикѣ. На первый взглядъ представляется, что указанный недостатокъ можно устранить, построивъ геометрію по единому методу. Таковымъ не можетъ быть интуиція, какъ мы старались установить выше; основываясь на ней, мы могли бы, правда, прійти къ нѣкоторымъ геометрическимъ знаніямъ; но послѣднія были бы подвержены всѣмъ ограниченіямъ опытной науки и ихъ нельзя было бы признать за отдѣлъ математики; къ тому же при такомъ способѣ изложенія геометріи она ничего не дала бы для развитія мыслительной способности ученика. Слѣдовательно, остается вторая возможность, т. е. построеніе геометріи, какъ строго дедуктивной системы по только что намѣченному плану; однако при исключительномъ господствѣ логическаго метода интуиція останется не развитой, и получится крупный пробѣлъ въ общемъ образованіи учащагося.

Независимо отъ этого соображенія, едва-ли возможно предложить приступающимъ къ изученію геометріи курсъ, построенный на общихъ выводахъ современной аксіоматики. Въ на-

стоящее время педагогика считаетъ аксіомой, что для успѣшнаго усвоенія сообщаемаго матеріала преподаваніе должно быть интереснымъ; имѣется въ виду, конечно, серьезный интересъ, направленный на существо предмета; и такой интересъ къ знанію дѣйствительно имѣется у всякаго нормальнаго ребенка.

Только направленіе этого интереса, его характеръ мѣняется съ возрастомъ; и съ этимъ необходимо считаться: чѣмъ можно заинтересовать учениковъ одного возраста, тѣмъ самымъ можно безнадежно оттолкнуть умы ихъ болѣе юныхъ товарищей. Извѣстно, что чѣмъ моложе человѣкъ, тѣмъ болѣе его интересы направлены въ сторону внѣшняго міра; и только съ возрастомъ приходитъ вкусъ къ изслѣдованію своего внутренняго «я», господствующихъ тамъ психологическихъ и логическихъ законовъ. Наконецъ само изученіе внѣшняго міра можетъ временами выражаться въ неудержимомъ стремленіи къ накопленію новыхъ фактовъ, временами же его главной цѣлью будетъ ихъ систематизація и критическое разсмотрѣніе методовъ. Что переживаетъ каждый человѣкъ, то повторяется и съ человѣчествомъ въ отдѣльныя эпохи; XVIII-ый вѣкъ великъ въ исторіи математики: здѣсь были созданы важнѣйшія идеи современнаго анализа, формулированы его труднѣйшія задачи; но о логической строгости своихъ построеній тогда думали немногіе; и теперь мы, вооруженные критическими работами 2-ой половины XIX-го вѣка, находимъ промахи у величайшихъ умовъ того столѣтія.

Такъ и учащіеся въ томъ возрастѣ, въ которомъ они приступаютъ къ изученію геометріи, полны жаждой знанія; и въ частности знаніе геометрическое можетъ дать имъ удовлетвореніе, но при непремѣнномъ условіи, чтобы это знаніе преподносилось имъ въ живой, интуитивной формѣ, связанной съ другими ихъ интересами въ области природы и повседневной жизни; излагать имъ отвлеченную логическую систему было бы ошибкой. Едва-ли они были бы способны понять необходимость аксіомъ въ родѣ слѣдующихъ: «существуетъ по крайней мѣрѣ одна точка», «если a есть точка, то существуетъ точка, отличная отъ a», «если точка a лежитъ между точками b и c, то она лежитъ и между c и b» и т. д. Едва ли

они уразумѣли бы сущность и необходимость теоремъ въ родѣ такихъ: «между двумя точками прямой имѣется безчисленное множество точекъ», «прямая дѣлитъ плоскость на двѣ части» и т. д. Не будутъ-ли для нихъ эти теоремы, по выраженію одного изъ нашихъ профессоровъ, послѣ доказательства менѣе ясными, чѣмъ до онаго? Дѣти такого возраста просто не имѣютъ никакихъ основаній—ихъ непродолжительный еще опытъ не могъ доставить имъ таковыхъ,—которыя сдѣлали бы для нихъ ясной неизбѣжность подобныхъ логическихъ тонкостей; послѣднія являются лишь сухимъ, непонятнымъ педантизмомъ учителя и способны надолго внушить учащемуся отвращеніе къ математикѣ. Другое дѣло, если преподаваніе, оставляя въ сторонѣ то, что можетъ оцѣнить только старшій возрастъ, сдѣлаетъ свой предметъ нагляднымъ; Клейнъ приводитъ слова Гербарта, что $^5/_6$ учащихся томятся на урокахъ математики, если послѣдняя не приводится въ связь съ приложеніями, и опять-таки $^5/_6$ проявляютъ къ ней живѣйшій интересъ, если она соединяется съ непосредственной интуиціей.—Однако послѣдовать подобному приглашенію—значитъ впасть въ другую крайность, которую мы уже осудили. По нашему мнѣнію изъ этого круга можетъ быть лишь одинъ выходъ: разбить преподаваніе геометріи на двѣ части, въ каждой удержать единство метода и каждую посвятить почти исключительному достиженію одной изъ двухъ намѣченныхъ выше цѣлей; первая будетъ соотвѣтствовать интуитивному, вторая—логическому элементу въ геометріи.

Первая часть—пропедевтическій курсъ—должна имѣть цѣлью развитіе пространственной интуиціи и накопленіе геометрическихъ знаній. Учащіеся должны продѣлать въ этомъ курсѣ тотъ путь, какимъ въ глубокой древности шло человѣчество, закладывая основы нашей науки; при этомъ самымъ широкимъ образомъ надо использовать ихъ способность пространственнаго воображенія; ея постоянное упражненіе и послужитъ лучшимъ средствомъ къ ея развитію. Мало того, въ пропедевтическомъ курсѣ необходимо отвести видное мѣсто т.-наз. лабораторному методу, т. е. экспериментированію всякаго рода; послѣднее можетъ происходить при помощи построеній съ простѣйшими геометрическими приборами, построе-

ній на клѣтчатой бумагѣ, вырѣзыванія и накладыванія фигуръ, и т. д. Здѣсь, по нашему мнѣнію, вполнѣ будетъ умѣстнымъ считать движеніе съ его извѣстными всѣмъ свойствами за одну изъ исходныхъ точекъ; вѣдь движеніе твердыхъ тѣлъ имѣетъ громадное значеніе въ психологическомъ происхожденіи основныхъ понятій и предложеній геометріи.

Такимъ образомъ передъ учащимися будетъ возсоздаваться геометрія въ непосредственной связи съ ихъ повседневнымъ опытомъ и интересами. Подобные курсы уже коегдѣ имѣются, и можно надѣяться, что мы услышимъ здѣсь сообщенія о нихъ, объ ихъ содержаніи, о детальной разработкѣ ихъ методовъ. Я ограничусь по этому поводу еще однимъ общимъ замѣчаніемъ. За послѣднее столѣтіе геометрія значительно расширила свои рамки въ самыхъ различныхъ направленіяхъ; появились цѣлыя новыя отрасли этой науки, при чемъ нѣкоторыя изъ нихъ важны въ теоретическомъ отношеніи, въ частности для вопросовъ объ основаніяхъ геометріи, а другія важны въ практическомъ, являясь весьма существеннымъ подспорьемъ для прикладныхъ наукъ. Намъ кажется, что настало время оживить и пополнить нѣсколькими главами новѣйшихъ теорій традиціонный матеріалъ элементарной геометріи, неизмѣненный со временъ Евклида, съ другой стороны окажется быть можетъ допустимыхъ кое-что выкинуть изъ современныхъ учебниковъ. Будемъ пока имѣть въ виду исключительно пропедевтическій курсъ; вслѣдствіе особаго характера его—преобладанія наглядныхъ доказательствъ, основанныхъ единственно на интуиціи, опытѣ и т. п.—увеличеніе его содержанія не представитъ какихъ-либо затрудненій. Мы думаемъ поэтому, что учащихся окажется возможнымъ ознакомить съ началами проективной геометріи, которая давно уже ждетъ времени, когда ее внесутъ въ элементы: вѣдь по сравненію съ обычной геометріей мѣры, геометрія положенія является болѣе основной, болѣе элементарной. Говоря опредѣленнѣе, въ пропедевтическомъ курсѣ преподаватель могъ бы затронуть слѣдующіе вопросы: перспективное положеніе основныхъ геометрическихъ образовъ 1-ой ступени, теорему Дезарга, построеніе 4-ой гармонической съ помощью

полнаго четыреугольника, быть можетъ — вычерчиваніе кривыхъ 2-го порядка. Но особенно подходитъ къ духу этого курса геометрія начертательная; послѣдняя дастъ твердую опору для пространственной интуиціи, научивъ изображать пространственные образы въ плоскости, не говоря уже о той практической пользѣ, которую принесетъ многимъ знакомство съ нею; у преподавателя будетъ тогда подъ рукою обильный и интересный матеріалъ для упражненій; притомъ начертательная геометрія по самому своему характеру чрезвычайно поддается именно аглядному, интуитивному изложенію: существуютъ, напр., прекрасныя модели для выясненія методовъ этой науки.

Мало-по-малу учащихся надо привести къ мысли, что математика не можетъ удовольствоваться тѣми пріемами доказательствъ, которые они до сихъ поръ примѣняли; этого можно достигнуть, ознакомивъ ихъ съ нѣкоторыми парадоксами, гдѣ вводитъ въ заблужденіе именно чертежъ, каковой до сего времени былъ почти единственнымъ руководителемъ.

Независимо отъ этого, необходимо выяснить, что для геометріи вовсе и не нужно постоянно прибѣгать къ интуиціи или опыту для обоснованія своихъ предложеній: исходя изъ нѣкоторыхъ фактовъ, можно прійти къ другимъ путемъ однихъ разсужденій, при чемъ выводы имѣютъ такую же достовѣрность, какъ и предпосылки; на примѣрахъ учащіеся могутъ оцѣнить силу дедукціи.

Къ этому времени у нихъ уже накопится порядочный запасъ свѣдѣній изъ области геометріи; такъ какъ къ тому же и общее развитіе ихъ съ возрастомъ повысится, то отчасти удовлетворенная жажда знанія естественно поведетъ — не безъ вліянія, конечно, преподавателя — къ желанію разобраться въ усвоенномъ матеріалѣ. Словомъ, классъ будетъ готовъ для перехода къ систематическому курсу, который является второй частью намѣченной программы. Этотъ курсъ будетъ уже построенъ по плану, требуемому основными положеніями современной аксіоматики; въ качествѣ исходной точки будетъ принято нѣсколько первоначальныхъ понятій, при чемъ нѣтъ надобности стремиться къ ихъ minimum'у, и извѣстнымъ образомъ выбранная система аксіомъ, при чемъ не будемъ во что

бы то ни стало заботиться о ихъ независимости; отказъ отъ этихъ двухъ требованій ни въ чемъ существенномъ не нарушитъ строго-логическаго изложенія курса и въ то же время значительно облегчитъ его построеніе. Затѣмъ должно быть твердо установлено, что эти предпосылки являются единственными во всемъ дальнѣйшемъ; а интуиція и чертежи будутъ лишь весьма удобнымъ вспомогательнымъ средствомъ. Во введеніи къ курсу не обойтись безъ того, чтобы не затронуть нѣкоторыхъ вопросовъ изъ общей логики,—вотъ благодарная почва для сближенія этихъ двухъ наукъ, одна изъ цѣлей фузіонизма въ широкомъ смыслѣ слова.

Покончивъ съ основаніями геометріи, классъ перейдетъ къ ея изученію по намѣченному выше методу; каждая теорема представится въ видѣ необходимаго логическаго слѣдствія изъ доказаннаго ранѣе; т. е. въ конечномъ счетѣ вся цѣпь геометрическихъ знаній явится лишь неизбѣжнымъ выводомъ изъ поставленныхъ во главѣ аксіомъ. Учащіеся научатся смотрѣть на геометрію, какъ на «гипотетически—дедуктивную систему» (слова Піери); они замѣтятъ, что въ сущности мы не утверждаемъ истины каждаго отдѣльнаго сужденія, а только его необходимую связь съ другими; каждое предложеніе геометріи имѣетъ подразумѣваемую предпосылку: «если выполняется такая-то система аксіомъ»... Указанная связь и есть единственный объектъ утвержденій чистой математики. Такимъ образомъ, во второй части геометрическаго курса на первый планъ будетъ выдвинута логическая сторона дѣла; переходя отъ конкретнаго изложенія первой части къ абстрактному содержанію второй, ученики продѣлаютъ вкратцѣ тотъ путь, которымъ шло человѣчество отъ наивныхъ и приближенныхъ предписаній египетскихъ землемѣровъ до широкихъ обобщеній современной логико-математической школы; интуиція и логическое мышленіе найдутъ при этомъ надлежащее мѣсто и время для своего развитія.

Мы полагаемъ, что благодаря препедевтическому курсу и болѣе зрѣлому возрасту учащихся, систематическій курсъ окажется вполнѣ доступнымъ ихъ пониманію; кое-что можетъ быть удастся даже сократить по сравненію съ настоящими программами. Вопросъ этотъ потребуетъ пристальнаго изученія;

какъ одинъ изъ примѣровъ, можно намѣтить, опираясь на авторитетъ Таннери, исключеніе главы о площадяхъ и объемахъ тѣхъ геометрическихъ фигуръ, которыя требуютъ для рѣшенія этого вопроса «метода исчерпыванія» древнихъ; въ самомъ дѣлѣ, если предполагается ввести въ среднюю школу начала анализа безконечно-малыхъ, то гораздо естественнѣе рѣшать указанныя задачи при помощи болѣе совершеннаго пріема. Освободившееся время можно удачно использовать опять-таки для нѣкоторыхъ новѣйшихъ теорій геометріи. Прежде всего и въ систематическомъ курсѣ нужно отвести извѣстное мѣсто для началъ проективной геометріи; только центръ тяжести мы были бы склонны перенести на другіе отдѣлы этой науки. Введеніе идеальныхъ или несобственныхъ элементовъ и законъ взаимности—вотъ тѣ вопросы, которые какъ нельзя болѣе умѣстны въ систематическомъ курсѣ; здѣсь выясняется возможность различныхъ истолкованій отвлеченной системы, и становится очевиднымъ исключительное господство въ геометріи дедуктивнаго метода, которому нѣтъ дѣла до того, какъ выглядятъ геометрическіе образы, и который основывается лишь на ихъ общихъ свойствахъ, дающихъ содержаніе аксіомамъ. Трудно найти другіе столь же доступные вопросы, гдѣ существо истинно-математическаго метода сказалось-бы яснѣе; возможно, правда, еще указать новую отрасль геометріи, по нашему мнѣнію, весьма пригодную для внесенія въ систематическій курсъ, но это мнѣніе можетъ встрѣтить и сильное противодѣйствіе; мы говоримъ о неевклидовой геометріи. Ближайшимъ и весьма серьезнымъ возраженіемъ будетъ указаніе на то, что подобнаго рода изслѣдованія могутъ произвести путаницу въ умахъ учащихся и останутся непонятыми.

Конечно, все зависитъ отъ предшествующей подготовки въ евклидовой геометріи и отъ логико-философскаго развитія вообще; при надлежащей постановкѣ систематическаго курса, при условіи, что учащимся ясенъ составъ геометріи, какъ гипотетически - дедуктивной системы, намъ представляется возможнымъ въ завершеніе, въ качествѣ заключительнаго аккорда, ознакомить ихъ съ работами Лобачевскаго. При этомъ достаточно будетъ ограничиться лишь начальными свѣдѣніями изъ этой области примѣрно по слѣдующей программѣ: теоремы

Лежандра о суммѣ угловъ треугольника, постулатъ Лобачевскаго, теорема о полномъ опредѣленіи треугольника заданіемъ его трехъ угловъ и, какъ слѣдствіе, отсутствіе подобія и существованіе абсолютной единицы длины, общій характеръ измѣненія угла параллелизма, вытекающія отсюда важнѣйшія различія обѣихъ геометрическихъ системъ. Мы не отрицаемъ всей трудности категорическаго рѣшенія этого вопроса и, намѣчая здѣсь программу—maximum систематическаго курса, приглашаемъ всѣхъ интересующихся заняться ея подробной разработкой.

За то, если-бы оказалось возможнымъ ввести въ курсъ средней школы начала неевклидовой геометріи, какое это было-бы крупное пріобрѣтеніе для общаго развитія учащихся! Мы получили бы достойное завершеніе логико-геометрическихъ изысканій, показавъ, какъ съ измѣненіемъ одной предпосылки мѣняются многія предложенія геометріи; внутренняя связь между аксіомами и выводными предложеніями сдѣлалась бы ощутимо ясной.

Наконецъ, національное сокровище, которымъ мы обладаемъ въ наслѣдіи Лобачевскаго, стало бы доступнымъ для широкихъ круговъ и было бы извлечено изъ-подъ спуда, гдѣ мирно покоится теперь. Конечно, на преподавателѣ лежитъ обязанность не допустить учащихся до необоснованнаго скептицизма передъ лицомъ двухъ различныхъ геометрій; онъ долженъ провести грань между отвлеченными построеніями чистой математики, гдѣ мы имѣемъ дѣло лишь съ выводомъ всѣхъ слѣдствій изъ сдѣланныхъ допущеній, и изслѣдованіями свойствъ реальнаго пространства, гдѣ уже нельзя ограничиться областью чистой мысли. Должно подчеркнуть, что геометріи Евклида и Лобачевскаго равно истинны, какъ логическія системы; къ пространству же нашего опыта примѣняется та, предпосылки которой осуществляются въ этомъ пространствѣ; заключить можно указаніемъ, что система Евклида удовлетворяетъ всей совокупности нашего опыта. Здѣсь снова приходится преподавателю выходить за предѣлы чистой математики, и въ этомъ ему должны помочь представители философскихъ наукъ.

Мы снова подходимъ къ идеямъ фузіонистовъ. Въ узкомъ смыслѣ эти стремленія понимаются, какъ желаніе не дробить

геометріи на планиметрію и стереометрію, а съ самаго начала имѣть дѣло и съ пространственными образами трехъ измѣреній; въ широкомъ смыслѣ—и таково пониманіе Клейна—подъ этимъ словомъ разумѣется стремленіе сблизить не только различные отдѣлы геометріи, но и различныя науки, а именно: математику, физику, техническіе предметы. Мы полагаемъ, что эти стремленія найдутъ полное и естественное осуществленіе въ пропедевтическомъ курсѣ; что касается дальнѣйшаго, то, конечно, всякій преподаватель съ удовольствіемъ оживитъ свой урокъ ссылкой на факты другой извѣстной ученикамъ области; но намъ кажется, что главная задача выполненія фузіонисткихъ чаяній лежитъ на представителяхъ прикладныхъ наукъ: они должны ставить свои предметы въ тѣснѣйшую связь съ математикой, памятуя слова Канта, что во всякой отрасли изученія природы мы постольку имѣемъ науку, поскольку встрѣчаемъ въ ней математику. Представители же нашей спеціальности могутъ главное свое вниманіе, помимо обученія техникѣ математическаго знанія, посвятить развитію и дисциплинированію ума учащихся; логически развитой умъ есть наиболѣе могучее орудіе человѣка, важнѣйшій факторъ его прогресса. Будемъ же помнить завѣтъ Платона, что негеометрамъ нѣтъ доступа къ вершинамъ мысли»!

Предсѣдатель. «Милостивые Государи! Этотъ прекрасный докладъ можетъ вызвать широкій обмѣнъ мнѣній, а время, отведенное для нашихъ сегодняшнихъ занятій, уже исчерпано; поэтому я предлагаю обсужденіе этого доклада перенести на 2-е января, когда будетъ сдѣланъ докладъ о начальномъ курсѣ геометріи».

Это предложеніе было принято собраніемъ единогласно.

ВТОРОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

28 декабря $10^1/_2$ час. дня.

Въ предсѣдатели избранъ пр.-доц. В. Ѳ. Каганъ. Въ почетные секретари—П. А. Долгушинъ.

III. Требованія, предъявляемыя психологіей къ математикѣ, какъ учебному предмету.

Докладъ С. И. Шохоръ-Троцкаго (Спб.) [1]).

Уважаемое собраніе! Мнѣ выпала, по порученію организаціоннаго Комитета нашего съѣзда, незаслуженная мною честь и трудная для меня задача—подѣлиться съ вами моими взглядами на тѣ требованія, которыя современная психологія можетъ предъявлять къ математикѣ, какъ учебному предмету, и къ намъ, учителямъ этого предмета.

Прежде чѣмъ рѣшиться на выступленіе предъ вами, я подѣлился своими соображеніями и сомнѣніями со слѣдующими лицами: А. В. Васильевымъ, Л. Е. Габриловичемъ, А. И. Гребенкинымъ, К. Н. Кржышковскимъ, И. И. Лапшинымъ, Н. О. Лосскимъ и А. П. Нечаевымъ. Изъ разговоровъ съ этими лицами я убѣдился въ томъ, что моя осторожность въ сужде-

---

[1]) Прочитанъ былъ докладъ этотъ съ нѣкоторыми сокращеніями въ виду постановленія Комитета Съѣзда относительно того, чтобы доклады не длились болѣе часу времени. Сокращенія эти здѣсь возстановлены.—Въ виду многочисленныхъ запросовъ относительно литературы предмета, позволю себѣ отмѣтить лишь весьма немногія сочиненія по психологіи, чтеніе которыхъ можетъ возбудить и поддержать интересъ учителя математики къ психологіи и оказать на него большое вліяніе. Къ числу таковыхъ сочиненій, безъ сомнѣнія, принадлежатъ книги Спенсера, Тэна, Бэна, Джемса, Вундта, Гефдинга, Эббингтауза, Наторпа, а также нѣкоторыя монографіи Бинэи, Анри, Нечаева, Рибо.

С. Ш.-Т.

ніяхъ о томъ, что́ можетъ, въ настоящее время, дать психологія учителю математики, не безосновательна. Будучи безусловнымъ сторонникомъ коренной реформы обученія математикѣ и считая для учителя математики прямо необходимой, неизбѣжной постоянную и непрерывную работу надъ своимъ философскимъ и специально-психологическимъ образованіемъ, я, можетъ быть, по причинѣ дефектовъ моего образованія въ указанномъ направленіи, осмѣливаюсь утверждать, что психологія въ настоящее время не можетъ опредѣлительно отвѣтить на вопросы обученія математики, какъ таковаго. Принося свою искреннюю признательность выше поименованнымъ лицамъ за оказанное ими мнѣ сочувствіе и содѣйствіе, я считаю себя обязаннымъ снять съ этихъ лицъ какую бы то ни было отвѣтственность за то, что́ я намѣренъ изложить сегодня, и за всѣ ошибки, недомолвки и недостатки этого моего доклада [1]).

Мейманъ въ одной изъ своихъ лекцій по экспериментальной педагогикѣ прямо говоритъ: «О психологическомъ обоснованіи обученія ариѳметикѣ намъ придется говорить нѣсколько меньше, чѣмъ о письмѣ, такъ какъ у насъ до сихъ поръ нѣтъ еще удовлетворительнаго анализа дѣятельностей ребенка, выполняемыхъ имъ при его занятіяхъ ариѳметикой, а развитіе числовыхъ представленій въ дошкольномъ возрастѣ еще почти вовсе не изслѣдовалось». И это справедливо относительно методики ариѳметики, которой литература неизмѣримо богаче, чѣмъ литература по методикѣ остальныхъ отдѣловъ математики!

Поэтому, когда въ организаціонномъ Комитетѣ нашего съѣзда рѣчь шла о докладѣ по вопросамъ о психологическихъ основахъ преподаванія математики, то сдѣлать его на нашемъ съѣздѣ я, еще ни съ кѣмъ не посовѣтовавшись, отказался, такъ какъ прямо не чувствовалъ себя въ силахъ сдѣлать таковой докладъ хотя бы въ малѣйшей

[1]) И. И. Лапшинъ не только снабдилъ меня нѣкоторыми новинками въ области литературы предмета, но предоставилъ въ мое распоряженіе свою не напечатанную рукопись объ интересной книгѣ Вайгингера (Vaihinger, die Philosophie des als ob, Berlin 1911). А. П. Нечаевъ подѣлился со мною своими взглядами на взаимное соотношеніе, существующее между психо-физіологіей и экспериментальной психологіей. К. Н. Кржышковскій сообщилъ мнѣ много свѣдѣній по современному состоянію ученія объ «условныхъ рефлексахъ».

С. Ш.-Т.

мѣрѣ удовлетворительно. Посовѣтовавшись съ поименованными выше лицами, которыя занимаются философіей или психологіею, какъ со спеціально ихъ интересующими областями вѣдѣнія, я въ этой мысли еще болѣе утвердился. Пришлось мнѣ обратиться къ новѣйшей литературѣ по вопросамъ психологіи, и я окончательно пришелъ къ твердому убѣжденію, что о психологическихъ основахъ обученія математикѣ подобаетъ говорить съ величайшей осторожностью. Вотъ почему я могу говорить (конечно, только въ самыхъ общихъ чертахъ) лишь о нѣкоторыхъ для меня несомнѣнныхъ и, я въ томъ увѣренъ, крайне важныхъ требованіяхъ, которыя психологія вправѣ предъявлять къ такъ наз преподаванію математики (вѣрнѣе: къ обученію этому предмету) и къ намъ, учителямъ математики.

Точнѣе говоря, я постараюсь намѣтить: 1) что именно мы, учителя математики, должны, съ точки зрѣнія психологической, принимать во вниманіе, уча математикѣ дѣтей, отроковъ и отроковицъ и кого бы то ни было; 2) чего дѣлать не должны при этомъ обученіи, и наконецъ, 3) въ какую сторону мы должны направить свои силы при изученіи психологической стороны нашего дѣла. Я постараюсь не предлагать никакихъ проектовъ относительно желательныхъ, по моему мнѣнію, измѣненій дѣйствующихъ программъ и учебныхъ плановъ, относительно измѣненія методъ обученія. Я это дѣлалъ неоднократно въ моихъ посильныхъ трудахъ и докладахъ, посвященныхъ именно этимъ вопросамъ. Я постараюсь имѣть въ виду преимущественно психологическія точки зрѣнія. Совершенно для меня неизбѣжнымъ явится также вниманіе къ нѣкоторымъ точкамъ зрѣнія педагогической этики.

Какъ ни мало у насъ времени, я считаю прямо необходимымъ дать хоть нѣкоторый, къ сожалѣнію, краткій и, вѣроятно, не свободный отъ многихъ недосмотровъ очеркъ того, что такое психологія въ настоящее время.

Какъ наука о душѣ, психологія намѣчена еще у Аристотеля, Платона и другихъ философовъ древней Эллады. Отцы церкви тоже занимались вопросами психологіи, но съ точекъ зрѣнія иногда Аристотелевскихъ, иногда Платоновскихъ. Они интересовались преимущественно вопросами психологіи воли и

поведенія, но всегда болѣе или менѣе въ связи съ церковно-христіанской догматикой и мистикой. Душа, ея свойства, происхожденіе и безсмертіе были главными предметами и вопросами психологіи. Аффекты, какъ явленія душевной жизни, впервые сдѣлались предметомъ анализа въ эпоху возрожденія, а именно у Вивеса (De anima, 1548). Въ XVII в. Декартъ и Спиноза являются психологами-спиритуалистами, и долго еще послѣ нихъ работы по вопросамъ психологіи говорили о душѣ, ея аттрибутахъ, силахъ, способностяхъ, и т. д. При этомъ старались строить науку психологіи болѣе или менѣе дедуктивнымъ путемъ, принявъ какіе-либо аттрибуты за основные и стараясь изъ нихъ вывести или къ нимъ свести всѣ остальныя «свойства», «способности» и явленія душевной жизни. Декартъ, напр., главнымъ аттрибутомъ души считалъ мышленіе и даже въ основу доказательство своего собственнаго существованія (каковое существованіе онъ считалъ нужнымъ доказывать) положилъ всѣмъ извѣстное предложеніе: «я мыслю, слѣдовательно я существую». Для насъ, учителей математики, можетъ быть, не безынтересно, что намъ часто говорятъ, и многіе изъ насъ сами думаютъ, что главною цѣлью и главнымъ условіемъ математическаго образованія является воздѣйствіе на умъ, на мышленіе учащагося, притомъ на мышленіе не интуитивное, а непремѣнно отвлеченное. А, между тѣмъ, воздѣйствіе это можетъ быть только одною изъ цѣлей математическаго образованія и только однимъ изъ условій его. Выше намѣченные взгляды на цѣль и условія математическаго образованія, можетъ быть, являются какъ бы «пережиткомъ», обязаннымъ своимъ процвѣтаніемъ Декарту и картезіанской школѣ.—Въ томъ же XVII вѣкѣ Гоббзъ считаетъ единственнымъ источникомъ знанія чувственныя воспріятія, и хотя онъ болѣе извѣстенъ, какъ философъ, разрабатывавшій вопросы государственнаго права въ духѣ сочувствія къ монархическому началу, въ психологіи онъ былъ сенсуалистомъ и матеріалистомъ чистѣйшей воды. Онъ утверждалъ, что душевныя явленія суть нѣкоторыя «движенія» въ нервномъ и мозговомъ веществѣ, и т. п. Дальнѣйшая разработка матеріалистической психологіи принадлежитъ энциклопедистамъ XVIII в. и нѣкоторымъ психологамъ вѣка XIX. Мате-

ріалисты-психологи, конечно, болѣе говорили о явленіяхъ душевной жизни, чѣмъ о самой душѣ и ея свойствахъ, аттрибутахъ и т. д. Но и они занимались болѣе объясненіемъ явленій и стремились болѣе къ этому объясненію, чѣмъ къ изученію законовъ, которымъ эти явленія подчиняются. При этомъ ихъ объясненія страдали голословностью и не основывались на точныхъ и надлежащимъ образомъ обставленныхъ наблюденіяхъ и опытахъ. — Дж. Локкъ («Опытъ о человѣческомъ разумѣ», 1690) сознаетъ, что невозможно познать душу и ея силы; но во главу своихъ психологичесскихъ воззрѣній онъ ставитъ ощущенія, остальныя же явленія считаетъ какъ бы вторичными, производными. Отъ Локка пошла эмпирическая психологія, хотя противъ нея впослѣдствіи и вооружился такой авторитетный мыслитель, какъ Лейбницъ, по мнѣнію котораго душа есть не что иное, какъ «монада» съ двумя основными свойствами: чувствованіемъ и желаніемъ.— У Юма появляется уже ассоціація идей. Гертли и Пристли вносятъ въ психологію физіологическія точки зрѣнія. Но до Канта, все же, стараются построить психологію болѣе или менѣе дедуктивнымъ путемъ, на почвѣ самонаблюденія и не организованнаго, не планомѣрнаго, такъ сказать, наблюденія надъ проявленіями душевныхъ процессовъ у другихъ людей. Этотъ вкусъ къ дедуктивному методу въ области психологіи, конечно, не мѣшалъ философамъ и психологамъ подмѣчать, благодаря самонаблюденію и наблюденіямъ надъ проявленіями душевной жизни у другихъ, все новыя и новыя душевныя явленія. Такъ, напр., уже Тетенсъ въ XVIII вѣкѣ говоритъ не только объ умѣ и волѣ, но и о чувствованіяхъ разнаго рода. Особенно Кантъ, въ своей, еще доселѣ не утратившей своего значенія, «Антропологіи» превосходно описываетъ весьма многія душевныя явленія, какъ таковыя. Хотя Кантъ не предвидитъ для психологіи возможности сдѣлаться наукою въ полномъ смыслѣ этого слова, но для него психологія должна интересоваться только душевными явленіями. Это, впрочемъ, не препятствуетъ Канту говорить о «душевныхъ способностяхъ», идея которыхъ имъ какъ бы унаслѣдована отъ Христіана Вольфа.

На Гербартѣ и Бенеке, которымъ особенно много обязана

педагогика и педагогическая психологія, мы долго останавливаться не будемъ. Гербартъ, поднявшійся до уразумѣнія того, что такъ наз. душевныя «способности» представляютъ собою нѣчто въ родѣ «миѳологическаго существа», тѣмъ не менѣе слишкомъ многаго ожидалъ отъ приложенія математическаго метода къ психологіи и разсматривалъ представленія (основной, по его мнѣнію, элементъ душевной жизни) какъ «силы», которыя вступаютъ во «взаимодѣйствіе», т. е. опять-таки старался болѣе о дедуктивномъ объясненіи душевныхъ явленій, чѣмъ объ ихъ объективномъ описаніи. Его математическій методъ не привелъ къ какимъ-либо важнымъ результатамъ. Бенеке, будучи гербантіанцемъ по существу своихъ психологическихъ изысканій, устанавливаетъ другую терминологію и, въ то же время, не вполнѣ отказывается отъ душевныхъ «способностей», хотя старается отказаться отъ метафизическихъ точекъ зрѣнія на явленія душевной жизни. Онъ ставитъ себѣ цѣлью положить въ основу изученія душевныхъ явленій наблюденіе и опытъ. Въ 1833 г. онъ издаетъ книгу подъ многозначительнымъ заглавіемъ: «Психологія какъ отрасль естествознанія». Но это было только какъ бы предвосхищеніемъ одной изъ тѣхъ идей, которыя одушевляютъ многихъ психологовъ въ настоящее время, но еще не осуществлены и понынѣ.

На остальныхъ, хотя и весьма заслуженныхъ и видныхъ психологахъ XIX в. (напр., на англичанахъ, которымъ весьма многимъ обязана эмпирическая психологія) намъ останавливаться не для чего, такъ какъ цѣль наша вовсе не въ томъ и не можетъ состоять въ томъ, чтобы разобраться во всѣхъ теченіяхъ и школахъ, развившихся въ XIX вѣкѣ въ области психологіи, какъ идеалистическихъ, такъ реалистическихъ. Но нельзя не отмѣтить, что и въ XIX вѣкѣ не мало психологовъ-метафизиковъ, есть и психологи-спиритуалисты, мистики-психологи и даже психологи-спириты.—Особеннаго вниманія заслуживаетъ медицинское направленіе въ области психологіи. Многіе врачи, физіологи и психопатологи все болѣе и болѣе стали выдвигать такія психологическія точки зрѣнія, которыя перекидываютъ мостъ между психологіей и физіологіей и, благодаря методамъ изслѣдованія жизни психически и нервно больныхъ, даютъ возможность заглянуть въ глубь процессовъ

душевной жизни здороваго человѣка. Назову хотя бы только слѣдующихъ физіологовъ-психологовъ: Веберъ, Фехнеръ, Гельмгольцъ, Вундтъ, Брока, Кабанисъ, Льебо, Бони, Шарко, Маудсли, Рибо, Рише, Бине, Корсаковъ, Бехтеревъ, Сербскій.

Весьма замѣтное мѣсто въ современной психологической литературѣ заняли представители такъ наз. экспериментальной психологіи: Мейманъ, Бине, Скойтенъ, Крэпелинъ, Нечаевъ, Лазурскій, Крогіусъ и др. Этой школѣ принадлежитъ заслуга такой постановки вопросовъ психологіи, при которой къ ихъ рѣшенію можно было бы приступить съ помощью методовъ экспериментальныхъ наукъ, согласно съ требованіями методологіи отраслей естествознанія.

Психологія въ настоящее время ставитъ себѣ проблемы научнаго изученія и точнаго описанія явленій душевнаго міра, не задаваясь разрѣшеніемъ вопросовъ метафизическихъ и теологическихъ (о томъ, что такое душа, каково ея происхожденіе, каковы ея аттрибуты, способности силы, «свободна» ли воля или не свободна, и т. п.) Она не спрашиваетъ о томъ, справедливо ли противоположеніе тѣлеснаго духовному или несправедливо, и не отвѣчаетъ на этотъ вопросъ. Она не задается вопросами гносеологическаго порядка (о томъ, что это значитъ знать, въ какомъ смыслѣ можно что-либо знать, и т. д.). Ее вообще не занимаютъ вопросы логическіе, эстетическіе, гносеологическіе, или религіозные, какъ таковые. Она смотритъ на мышленіе, знаніе, чувствованіе, на эмоціи эстетическія и религіозныя, на нравственныя идеи и на волевыя акты, какъ на явленія. Ее занимаютъ эти явленія, какъ явленія sui generis, душевной жизни, ихъ послѣдовательность, сосуществованіе, закономѣрность, взаимоотношенія. Нынѣ есть цѣлый рядъ, такъ сказать, частныхъ психологій, хотя многія изъ нихъ находятся еще въ зародышевомъ состояніи: психологія индивидуальная, общественная, толпы, ребенка, педагогическая, психологія средняго человѣка, генія, таланта, психологія языка, народовъ, патологическая психологія, и т. п. При современномъ состояніи знанія, явленія душевной жизни оказываются чрезвычайно разнообразными и сложными. Многое, на что ранѣе психологи не обращали вниманія, съ ростомъ наблюдательности и, такъ сказать, чуткости къ явленіямъ ду-

шевной жизни человѣка, нынѣ уже стало вопросомъ важнымъ и интереснымъ, чуть ли не первостепеннымъ. Душевныя явленія, ранѣе считавшіяся совершенно обособленными одно отъ другого, нынѣ оказываются сосуществующими, сопутствующими одно другое и другъ отъ друга взаимно зависящими. Такъ, напр., не только многія чувственныя воспріятія и специфическія ощущенія, но даже продукты отвлеченнаго мышленія, отвлеченныя понятія и идеи, не совершенно лишены (по крайней мѣрѣ, не всегда лишены) переживаній, извѣстныхъ подъ именемъ чувствованій, стремленій, желаній и т. д. Представленія, понятія и идеи иногда вызываютъ движенія, а извѣстныя движенія и физіологическіе процессы вызываютъ цѣлый рядъ идей, чувствованій, поступковъ и дѣйствій. Мы иногда плачемъ, потому что грустимъ, но иногда грустимъ потому, что плачемъ и не удержались отъ слезъ. Страдающихъ даже едва замѣтной для другихъ слабой формой «боязни пространства» «тянетъ» броситься въ пролетъ лѣстницы; у нихъ «подкашиваются» ноги, если лѣстница не снабжена перилами. Я не скоро кончилъ бы, если бы пожелалъ привести даже не извѣстные всѣмъ и каждому случаи взаимнаго «переплетенія» душевныхъ переживаній различныхъ порядковъ, ихъ взаимной связи и ихъ связи съ явленіями физіологическаго порядка.

Изъ этого краткаго очерка легко усмотрѣть, что у психологіи, какъ науки, было такъ много дѣла по установленію своихъ задачъ и цѣлей, объектовъ своего изученія и методовъ его, что вопросовъ преподаванія вообще, и математики въ частности, она могла касаться только вскользь, мимоходомъ. Выработка и установленіе **основъ** этого преподаванія, вообще, не входитъ въ ея задачи.

Въ настоящее время количество подмѣченныхъ душевныхъ **явленій**, можно сказать, неизмѣримо велико, и ихъ изученіе—дѣло и задача будущаго, чтобы не сказать—болѣе или менѣе отдаленнаго будущаго. Физіологи и врачи, психопатологи, невропатологи и физики, знатоки первобытныхъ культуръ и педагоги обогатили психологію крайне интересными фактами, говорящими для тѣхъ, кто хочетъ слышать и видѣть, о закономѣрности въ мірѣ такъ наз. душевныхъ явленій и о связи

ихъ съ явленіями физіологическими,—и обратно о вліяніи душевныхъ явленій на многіе физіологическіе процессы и явленія. Укажу, въ области физіологической психологіи, на позднѣйшія работы хотя бы только одного ученаго, которымъ можетъ гордиться Россія, и созданой имъ школы. Я говорю объ И. П. Павловѣ, установившемъ методы изученія отображенія воздѣйствій внѣшняго міра на отдѣленіи слюны и желудочнаго сока и выдвинувшемся въ первые ряды психологовъ-физіологовъ, между прочимъ, своей теоріей такъ наз. «условныхъ рефлексовъ».

Старинное раздѣленіе всѣхъ явленій такъ наз. душевной жизни человѣка только на три, какъ бы обособленныя, категоріи (ума, чувства и воли) лишь до извѣстной, притомъ не всегда достаточной, степени удобно. Оно уступаетъ свое мѣсто другому взгляду, по которому почти въ каждомъ душевномъ явленіи одновременно участвуютъ и такъ наз. умъ, и чувство, и—можно сказать—весь человѣкъ со всѣмъ громаднымъ міромъ его душевныхъ переживаній, не подходящихъ иногда ни подъ одну изъ поименованныхъ трехъ рубрикъ. Особенно легко усматривается эта несомнѣнная сложность душевной жизни человѣка въ томъ удивительномъ явленіи, которое извѣстно подъ именемъ «такта». Это явленіе, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что человѣкъ, стоящій на той или иной ступени культуры, во всякій моментъ своей жизни, при соприкосновеніи съ другими людьми, старается, въ зависимости отъ множества условій этого соприкосновенія, поступить такъ, какъ «слѣдуетъ», и не сдѣлать ничего такого, чего дѣлать «не слѣдуетъ» въ данномъ частномъ случаѣ. Это—одно изъ тѣхъ явленій, въ которомъ и для не посвященнаго видно участіе и ума, и воли, и чувствъ разнаго рода, и памяти, и вниманія, и творчества, и воображенія.

Переберемъ хоть нѣкоторыя душевныя переживанія, извѣстныя всякому культурному человѣку, интересующемуся психологическими вопросами. Это—цѣлый міръ. Игнорируя этотъ міръ, учитель, строго говоря, игнорируетъ человѣка или, по крайней мѣрѣ, смотритъ на него слишкомъ узко и поверхностно.

Мы воспринимаемъ внѣшнія раздраженія и нѣкоторыя явленія, происходящія въ нашемъ организмѣ (особенно въ слу-

чаяхъ недомоганія или въ состояніи особенной къ нимъ воспріимчивости). Мы ихъ осознаемъ, и они помогаютъ или препятствуютъ цѣлесообразному теченію остальныхъ нашихъ переживаній или поступковъ и нормальному ихъ объективированію. Мы переживаемъ громадный комплексъ разнообразнѣйшихъ ощущеній: свѣтовыхъ, звуковыхъ, мускульныхъ, вкусовыхъ, обонятельныхъ, осязательныхъ, тепловыхъ и иногда не поддающихся характеристикѣ однимъ словомъ. Слѣпорожденные испытываютъ ощущеніе пустого пространства и близости преграды («шестое чувство» слѣпыхъ, Fernsinn, sens des obstacles, facial perception). У нѣкоторыхъ, вообще, нормальныхъ людей, и особенно у дѣтей, встрѣчаются (гораздо чаще, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда) признаки такъ наз. «психической глухоты», по винѣ которой люди, хорошо слышащіе, не скоро реагируютъ на вопросы, къ нимъ обращенные, и кажутся болѣе разсѣянными и менѣе внимательными, чѣмъ каковы они на самомъ дѣлѣ. Мы испытываемъ чувства голода, жажды, чувства утомленія и усталости безъ болевыхъ ощущеній, и т. п. Мы многое помнимъ, запоминаемъ, вспоминаемъ, очень многое забываемъ (по мнѣнію Фрейда, вовсе не случайно). Мы отдаемъ себѣ (болѣе ими менѣе) отчетъ въ испытываемыхъ нами ощущеніяхъ и апперципируемъ воспріятія. Мы постоянно живемъ въ мірѣ комплекса различныхъ представленій относительно того, что есть, что было и что будетъ, и относительно того, чего нѣтъ, никогда не было и не будетъ. Мы создаемъ себѣ общія представленія и отвлеченныя понятія и творимъ идеи, и въ этой послѣдней работѣ участвуетъ не одинъ чистый разумъ. Не подлежитъ никакому сомнѣнію актъ вниманія; мы думаемъ, воображаемъ, судимъ, разсуждаемъ, предаемся воспоминаніямъ, размышленіямъ и мечтамъ. Мы мыслимъ интуитивно и планомѣрно-логически. И всѣ эти душевныя явленія совершаются не случайно, а по нѣкоторымъ, иногда не извѣстнымъ намъ, законамъ. Напр., психологія мышленія еще не вполнѣ намѣчена въ отношеніи своихъ проблемъ, несмотря на то, что логика, одна изъ древнѣйшихъ философскихъ дисциплинъ, справедливо считается отраслью философіи, сравнительно хорошо разработанною. Даже явленіе такъ наз. «забыванія» еще недостаточно изучено, и, по Фрейду,

которому наука психіатріи обязана методомъ психо-анализа особаго рода, мы часто забываемъ что-либо не совершенно случайно, а по личнымъ, можно сказать, чуть не эгоистическимъ, хотя и не осознаннымъ, мотивамъ, которые нами въ этомъ забываніи какъ бы руководятъ.

Другую область, менѣе изученную, чѣмъ явленія воспріятія, представленія, памяти, вниманія и мышленія, составляютъ явленія, хотя съ ними сосуществующія, но совсѣмъ иного порядка. Мы многимъ интересуемся сильно, слабо, совсѣмъ не интересуемся. Мы испытываемъ огорченія, радости; отвращеніе; грусть, горе, печаль; любовь, ненависть, презрѣніе; гнѣвъ, обиду, оскорбленіе; смущеніе, стыдъ; испугъ, страхъ, ужасъ. Мы часто вспоминаемъ о своей принадлежности къ тому или иному полу, безъ малѣйшей тѣни полового самочувствія: мы ее только вспоминаемъ. Мы испытываемъ чувства состраданія, сочувствія, пріязни, дружбы, уваженія, почтенія, благоговѣнія, умиленія, удивленія, восхищенія. Мы гордимся, завидуемъ, раскаиваемся, обижаемся, оскорбляемся, смиряемся, ревнуемъ, вѣримъ и вѣруемъ. Намъ доступны удовольствіе и неудовольствіе, нравственное и эстетическое удовлетвореніе, недовольство собою и другими, облегченіе, успокоеніе. Есть настроенія, которыхъ не охарактеризовать однимъ и даже нѣсколькими словами. Мы видимъ сновидѣнія, и во снѣ, не двигаясь съ мѣста, падаемъ, бѣгаемъ, летаемъ; во снѣ радуемся, страдаемъ, плачемъ и смѣемся.

У насъ есть чувство долга, собственнаго достоинства, чести и другія нравственныя чувства. Иногда мы живемъ двойственною жизнью, почти въ одно и то же время испытывая прямо, казалось бы, несовмѣстимыя чувствованія: любви и ненависти, тревоги и самоуспокоенія, плачемъ отъ радости и смѣемся въ безысходномъ горѣ, «горько» смѣемся. Мы любопытны, любознательны, поддаемся внушенію и самовнушенію и т. д., и т. д. Если я такъ долго говорилъ о мірѣ чувствованій, то только потому, что какъ-разъ этотъ моментъ, чрезвычайно важный для педагога и учителя, мы часто упускаемъ изъ виду, уча и воспитывая дѣтей и учащихся разныхъ возрастовъ. Нѣкоторыя изъ нашихъ чувствованій (напр., радость, горе, смущеніе, обида, оскорбленіе, гнѣвъ и т. п.) вызываютъ

разстройство въ области и въ теченіи другихъ душевныхъ переживаній и даже въ физіологическихъ функціяхъ нѣкоторыхъ органовъ нашего тѣла и нѣкоторыхъ железъ (сердца, легкихъ, пищевого тракта, почекъ, слезныхъ и потовыхъ железъ), въ сферѣ вазомоторной системы и т. д.

Можетъ-быть, не безполезно отмѣтить, что у великихъ художниковъ слова (назову хотя бы только Шекспира, Гете, Толстого, Достоевскаго) мы знакомимся съ такими тонкими, сложными и едва уловимыми душевными явленіями, которыя могли быть подмѣчены и осознаны только великими знатоками человѣка и которыя въ научно-психологическомъ отношеніи еще не обслѣдованы. Въ частномъ разговорѣ И. И. Лапшинъ обратилъ мое вниманіе на то обстоятельство, что психологія, какъ наука, еще не добралась до научнаго изслѣдованія множества душевныхъ явленій, которыя подмѣчены и уже описаны великими художниками слова. Игнорировать область чувствованій и ихъ вліяніе на остальныя переживанія учащихся и стараться дѣйствовать только на отвлеченную мысль учащихся, на ихъ память и вниманіе, педагогъ XX вѣка уже не въ правѣ. Не въ правѣ это дѣлать и мы, учителя математики. Учитель, не умѣющій или не желающій считаться съ тѣмъ, что учащійся математикѣ долженъ интересоваться предметомъ и его вопросами, что онъ долженъ испытывать удовольствіе отъ самой работы надъ ними, долженъ испытывать радость по поводу преодолѣваемыхъ имъ трудностей, долженъ испытывать чувства умственнаго, нравственнаго и эстетическаго удовлетворенія, уваженія къ наукѣ, удивленія по поводу добываемыхъ ею результатовъ, и т. д.,—такой учитель, конечно, не удовлетворяетъ современнымъ требованіямъ психологіи. Онъ не считается съ тѣмъ, что учащійся—не бездушный сосудъ, въ который надо свалить полагающійся, по программѣ, учебный математическій матеріалъ, а человѣкъ въ полномъ смѣслѣ этого слова, съ безконечно богатымъ міромъ душевныхъ переживаній, на который онъ, какъ таковой, имѣетъ полное право. Это—уже вопросъ педагогической этики, который я, по необходимости, осмѣливаюсь затронуть въ этомъ мѣстѣ своего доклада.

Явленія душевной жизни, конечно, не исчерпываются только выше охарактизованными переживаніями. Мнѣ остается

еще, хотя бы вкратцѣ, намѣтить одну сферу переживаній, крайне важныхъ въ жизни человѣка и извѣстныхъ подъ именемъ побужденій, стремленій, желаній, хотѣній, рѣшеній, влеченій и т. п. Эта область тѣснѣйше связана съ сопровождающимъ ихъ интересомъ къ чему-нибудь. Далѣе натыкаемся на безконечно важную область дѣйствій и поступковъ, вполнѣ сознательныхъ или не вполнѣ сознательныхъ, а также безсознательныхъ, привычныхъ или непривычныхъ. Въ дѣйствіяхъ переплетаются и объективируются различныя хотѣнія и стремленія, рѣшенія и влеченія, желанія и побужденія. Но, при этомъ, не всякій поступокъ, не всякое дѣйствіе является исполненіемъ сознаннаго желанія и стремленія, и не всякое желаніе или стремленіе влекутъ за собою соотвѣтствующій поступокъ, соотвѣтственное дѣйствіе. Рѣчь есть только одно изъ дѣйствій человѣка и для полной жизни человѣку, въ области дѣйствій, ограничиваться одной только рѣчью, конечно, недостаточно. Къ сожалѣнію, часто обученіе математикѣ сводится преимущественно къ тому, что отъ учащагося требуютъ того, чтобы онъ только говорилъ и произносилъ рядъ заученныхъ словъ. Этого, конечно, недостаточно для того, чтобы удовлетворить тому требованію психологіи, по которому жизнь человѣка не должна исчерпываться только однимъ какимъ-либо родомъ душевныхъ переживаній. Не объективируя своихъ душевныхъ переживаній разнаго рода наружу, человѣкъ живетъ только въ мірѣ безпорядочныхъ чувственныхъ воспріятій, болѣе или менѣе однообразныхъ ощущеній, ни къ чему его не обязывающихъ представленій, въ мірѣ немногихъ отвлеченныхъ понятій и идей, и ни къ чему не ведущихъ желаній, стремленій и настроеній. Такая жизнь — не жизнь. Человѣкъ, живущій такой только жизнью, несомнѣнно тяжко боленъ, какъ бы благородны ни были его мысли, чувствованія и настроенія, какъ бы философичны ни были его размышленія. Еще менѣе нормальною можно считать такую жизнь, которая ограничивается душевными переживаніями одного только рода.

Человѣкъ долженъ дѣйствовать. Вѣрнѣе: онъ долженъ откликаться на весь разнообразный міръ, такъ сказать, нападающихъ на него внѣшнихъ раздраженій, долженъ ихъ воспри-

нимать и ими распоряжаться, долженъ ощущать, чувствовать, мыслить, разсуждать, стремиться, желать и—дѣйствовать. Безъ соблюденія этихъ условій нѣтъ радости жизни и, поэтому, нѣтъ настоящей жизни. Отсюда съ очевидностью вытекаетъ, что учить математикѣ такъ, чтобы учащіеся главнымъ образомъ «доказывали», «разсуждали», «опредѣляли» отвлеченныя понятія; «помнили» правила и рядъ словъ, взятыхъ въ извѣстномъ порядкѣ, и вычисляли,—что такъ учить математикѣ значитъ итти наперекоръ требованіямъ, вытекающимъ изъ данныхъ психологіи.

Въ каждый данный моментъ своей жизни (за исключеніемъ моментовъ психическаго отдыха, тоже крайне необходимаго, притомъ необходимаго съ физіологической точки зрѣнія) человѣкъ переживаетъ много переживаній, изъ которыхъ одно какъ будто бы доминируетъ надъ другими, а на самомъ дѣлѣ только проявляется сильнѣе другихъ, но безъ другихъ чаще всего и невозможно. Даже склонный къ особенно абстрактному мышленію философъ не всегда только мыслитъ. Мысля, онъ облекаетъ мысли въ невысказанныя слова, испытываетъ муки или радости творчества, чувствуетъ нравственное удовлетвореніе или неудовольствіе, стремится къ глубокому проникновенію въ существо вопроса, желаетъ его наилучшимъ образомъ разрѣшить, унываетъ и отчаивается по поводу своего безсилія или радуется тому, что вопросъ приближается къ своему разрѣшенію, руководится этическими и эстетическими чувствованіями и стремленіями. Иногда, притомъ весьма часто, этотъ мыслитель спускается съ высотъ отвлеченной мысли въ глубь переживаній, такъ сказать, низшаго порядка: въ область представленій не только общихъ, но частныхъ и единичныхъ. Наблюденіе показываетъ, что вполнѣ возможенъ волевой контроль надъ процессами ассоціаціи, что ритмъ необходимъ во всякой работѣ, что мимика и интонаціи составляютъ необходимый элементъ образнаго мышленія («большо-о-ой», «длин-н-н-ый»). И т. д.

Вотъ до чего сложна душевная жизнь человѣка вообще, а вѣдь ничто человѣческое не чуждо, въ той или иной степени, учащемуся математикѣ или какому угодно учебному предмету, въ возрастѣ учебномъ, когда человѣкъ еще не до-

стигъ полнаго расцвѣта своихъ силъ. Игнорировать всю сложность душевныхъ переживаній, ихъ, такъ сказать, естественное «совмѣстительство» учащій не имѣетъ права съ точки зрѣнія этико-педагогической. Тѣмъ меньше у него правъ и основаній на ни къ чему не ведущее и совершенно, поэтому, нецѣлесообразное покушеніе на измѣненіе той закономѣрности, которая въ большей или меньшей степени наблюдается въ душевной жизни всякаго человѣка и всякаго учащагося человѣка въ частности. Въ эпоху большаго или меньшаго господства или абсолютнаго авторитета церковно-христіанской аскетики считалось, что духъ и тѣло чуть ли не созданы для борьбы двухъ началъ: божественнаго и діавольскаго. Тогда думали, что тѣло именно и есть вмѣстилище начала діавольскаго. Въ аналогичномъ положеніи въ XIX вѣкѣ находились логика и интуиція, отвлеченная мысль и чувственныя воспріятія, разумъ и фантазія, такъ наз. формальное развитіе и здравый смыслъ учащагося математикѣ. Нѣкоторые и понынѣ считаютъ интуицію чѣмъ-то низшимъ по сравненію съ отвлеченнымъ мышленіемъ. Психологіи, какъ таковой, чуждо стремленіе къ раздачѣ дипломовъ и ставить «баллы» тому или иному душевному явленію.

Требовать отъ учащагося, чтобы онъ только разсуждалъ, только мыслилъ и философствовалъ, чтобы онъ жилъ въ области только отвлеченныхъ понятій, считалось и понынѣ многими считается признакомъ наилучшаго тона. Но во всей строгости это требованіе не выполнимо. Путемъ школьныхъ наказаній и другихъ болѣе тонкихъ средствъ насилія можно добиться того, что учащійся, повидимому, будетъ исполнять подобныя требованія. Но онъ это будетъ дѣлать, только обременяя свою память словами и лишая себя радостей творческой и сообразной съ его природою работы. Вообще, исключительно отвлеченное, въ навязанныхъ схемахъ, мышленіе безполезно. А дѣйствительное и самостоятельное отвлеченное мышленіе, какъ и всякая исключительная черта натуры—достояніе немногихъ., Учитель можетъ только постепенно и планомѣрно ставить учащихся въ такія условія, при которыхъ учащіеся постепенно пріобрѣтали бы нѣкоторый, большій или меньшій, вкусъ къ отвлеченному мышленію и испытывали бы иногда, и именно тогда, когда это возможно, потребность въ такомъ мышленіи и

эстетическое удовольствіе и нравственное удовлетвореніе при удовлетвореніи этой потребности. Безъ этой потребности и безъ этого удовольствія всѣ труды учителя не приведутъ ни къ чему, кромѣ подневольнаго и не цѣлесообразнаго исполненія учащимися этой повинности, совершенно не соотвѣтствующей ихъ потробностямъ. Вообще, каждый человѣкъ по самой натурѣ своей и по большей или меньшей ограниченности ея силъ, во всякомъ дѣлѣ, во всякомъ искусствѣ, во всякомъ ремеслѣ, во всякой дѣятельности своего ума и тѣла, можетъ достигнуть только извѣстнаго предѣла совершенства, его же не прейдеши.

Гауссы, Паскали, Абели, Галуа, уже въ раннемъ возрастѣ бывшіе геометрами и философами in spe, насчитываются единицами, и они достигаютъ высотъ, недостижимыхъ для остального человѣчества, не благодаря школѣ. Отсюда, конечно, не слѣдуетъ, что лишать учащихся возможности постепенно и посильно подыматься на высоты отвлеченной мысли и посильно стремиться на эти высоты, съ психологической точки зрѣнія, нѣтъ никакого основанія. Наоборотъ: это — тоже необходимо. Но подниматься на эти высоты они, опять-таки согласно требованіямъ психологіи, должны, повторяю, постепенно и по мѣрѣ силъ своихъ. Что совершенно недоступно въ дѣтскомъ возрастѣ, то можетъ оказаться цѣлесообразнымъ въ возрастѣ юношескомъ, и наоборотъ: что̀ приличествуетъ дѣтскому возрасту, то не приличествуетъ не только юношескому, но даже отроческому.

Судить о томъ, что́ для даннаго возраста, на данной ступени обученія, цѣлесообразно, можно, только опираясь на положительныя, въ области психологіи, знанія, можно только при условіи внимательнаго, безъ предвзятыхъ взглядовъ, отношенія къ потребностямъ учащихся, къ мѣрѣ и степени ихъ, если можно такъ выразиться, душевнаго и физическаго, а не умственнаго только, развитія. Для пріобрѣтенія способности къ этому вниманію, конечно, для учителя недостаточно прочесть одну или двѣ книги по предмету психологіи. Надо читать и многое перечитывать, надо изучать то, что читаемъ по вопросамъ психологіи, и по мѣрѣ силъ и возможности — слѣдить за литературой предмета, слѣдить усердно и непрестанно. Гото-

выхъ рецептовъ для надлежащаго обученія психологія не даетъ и давать не обязана, какъ механика не даетъ готовыхъ рецептовъ для устройства машинъ, какъ физіологія не даетъ рецептовъ для воспитанія физическаго. Но психологія въ настоящее время установила массу фактовъ, наводящихъ на надлежащее пониманіе многихъ явленій душевной жизни. Она учитъ наблюдать и изучать душевныя явленія, и хотя прямо этого не говоритъ (да это и не ея дѣло), но наводитъ на мысль о необходимости наблюденій надъ жизнью учащихся, на мысль о необходимости изученія ихъ индивидуальностей, ихъ натуръ и характеровъ, вниманія къ ихъ возрасту и его особенностямъ. Она показываетъ намъ, что міръ душевныхъ переживаній каждаго человѣка (а, стало быть, и учащагося) гораздо сложнѣе, чѣмъ это кажется непосвященному «человѣку въ футлярѣ». Есть у человѣка стремленіе къ «игрѣ», а у учащихся это стремленіе очень сильно и вполнѣ естественно. Этимъ стремленіемъ надо воспользоваться, къ нему нельзя относиться, какъ къ душевному явленію, презрительно или пренебрежительно. Часто у людей замѣчаются обмолвки (вмѣсто «направо» — «налѣво», вмѣсто «непремѣнно» — «напремѣнно»), есть описки (вмѣсто *ѣ* буква *е* и обратно), есть боязнь обмолвки и зависящая именно отъ этой боязни обмолвка. Но вѣдь это — явленія душевной жизни, а не преступленія, и. какъ таковыя, они заслуживаютъ вниманія учителя. А, между тѣмъ, какъ много страданій мы, учителя математики, причиняемъ учащимся именно тѣмъ, что на всякую обмолвку и описку смотримъ, какъ на проступокъ и признакъ незнанія! Ученикъ, сказалъ «периметръ основанія» вм. «площадь основанія», «половина высоты» вм. «половина апоѳемы», и casus belli готовъ. А, между тѣмъ, это могло быть обмолвкой именно вслѣдствіе страха предъ обмолвкой и т. п.

Цѣлесообразность и пригодность того или иного учебнаго пособія, того или иного пріема обученія должна быть провѣрена и установлена, если къ тому есть возможность, путемъ экспериментальнымъ. Приведу конкретный примѣръ. Въ классѣ уже «усвоена» теорема о томъ, что діагональ квадрата и сторона его несоизмѣримы, т. е. ученики умѣютъ произнести рядъ словъ и выполнить чертежъ, относящіеся до этой тео-

ремы. Но попробуйте классу предложить вопросъ, не равна ли сторона квадрата нѣкоторой части его діагонали. Отвѣтъ: «равна». Не составляетъ-ли она двухъ третей діагонали? И окажется, что нѣкоторые ученики отвѣтятъ: «можетъ-быть», несмотря на то, что вы доказали, и они себѣ «усвоили», что сторона квадрата и діагональ его несоизмѣримы. Дальше путемъ разспросовъ, вамъ, наконецъ, удастся добиться того, что никто изъ учащихся не будетъ утверждать, что сторона квадрата выражается какою-нибудь обыкновенной правильной дробью діагонали. Ученики уже чувствуютъ себя какъ бы припертыми къ стѣнѣ вашей діалектикой и «чувствуютъ», что они не въ состояніи васъ опровергнуть. Но попробуйте предложить вопросъ, кто изъ присутствующихъ въ классѣ **увѣренъ** въ томъ, что несоизмѣримые отрѣзки дѣйствительно существуютъ, и въ классѣ сразу намѣтятся двѣ «партіи», а можетъ-быть, и три. Одни, «безпартійные», не станутъ реагировать на вашъ вопросъ, другіе (ихъ будетъ очень немного) будутъ говорить (можетъ быть, руководясь самымъ тономъ вашего вопроса и угадывая, чего вы ждете отъ «хорошихъ» учениковъ), что несоизмѣримые отрѣзки существуютъ, а очень многіе, все-таки, будутъ утверждать, что «въ концѣ концовъ» всякіе два отрѣзка соизмѣримы... И вся ваша теорема о діагонали и сторонѣ квадрата провалилась въ пропасть. И это явленіе зависитъ не отъ васъ, а отъ самого существа вопроса и отъ несоотвѣтствія между совсѣмъ для насъ не замѣтною тонкостью вопроса и интересами возраста учащихся. **Сразу**, съ помощью доказательства одной теоремы, поднять ихъ до непоколебимой власти надъ своей отвлеченной мыслью, конечно, невозможно. — Этимъ конкретнымъ примѣромъ и многими ему подобными легко доказать всю нецѣлесообразность **преподаванія** математики ev cathedra, хотя бы мы въ это преподаваніе вносили пріемы такъ наз. «спрашиванія» уроковъ, которое, строго говоря, сводится въ большинствѣ случаевъ къ украшенію класснаго журнала большей или меньшей порціей единицъ и двоекъ.

Посильный докладъ мой, по самой темѣ своей болѣе касается психологіи, чѣмъ преподаванія математики, и болѣе преподаванія математики, чѣмъ математики, какъ таковой. Съ этимъ намъ приходится мириться. Но, въ цѣляхъ лучшаго

освѣщенія занимающаго насъ вопроса, я обязанъ нѣсколько остановиться на нѣкоторыхъ математическихъ вопросахъ, изученіе которыхъ, съ психологической точки зрѣнія, въ высшей степени поучительно.

Начнемъ съ ариѳметики, какъ учебнаго предмета, въ ея современной постановкѣ. Счетъ и первыя представленія о числахъ, какъ ни смотрѣть на логическое построеніе ученія о натуральномъ числѣ, связаны несомнѣнно съ рядомъ чувственныхъ воспріятій, непремѣнно предшествующихъ представленіямъ числового порядка. Слова, обозначающія числа, большія десяти, подчиняются нѣкоторымъ *этимологическимъ законамъ* того или другого языка. Цифры же и ихъ сочетанія представляютъ собою уже условныя письменныя обозначенія. Всѣ эти элементы, выше подчеркнутые мною, вовсе не такъ просты, какъ это кажется непосвященному въ трудности начальнаго обученія. Условность въ письменномъ обозначеніи чиселъ по десятичной системѣ счисленія, съ помощью десяти такъ наз. арабскихъ цифръ, вовсе не такъ охотно пріемлется учащимися, какъ этого хотѣлось бы учителю, торопящемуся научить ихъ уму-разуму. Учащійся сразу не можетъ (а потому и не долженъ) усвоить себѣ всю технику чтенія чиселъ, ихъ записыванія и ихъ порядка. Не даромъ же всякая письменная нумерація была изобрѣтеніемъ, до котораго человѣчество добиралось въ теченіе тысячелѣтій, притомъ съ большимъ трудомъ.—Но въ ариѳметикѣ есть не только нумерація. Тамъ есть опредѣленія, техническіе *навыки*, правила, условный смыслъ нѣкоторыхъ терминовъ, для цѣлыхъ чиселъ имѣющихъ одинъ смыслъ, для нуля, единицы и дробей — другой. И т. д. Усвоеніе этихъ тонкостей, изъ которыхъ нѣкоторыя являются тонкостями логическаго порядка, требуетъ особенныхъ усилій не одного только ума учащагося. Нѣкоторыя тонкости, требуютъ прямо большого и увы! не всегда доступнаго учащимся труда. Психологія, конечно, вовсе не вооружается противъ труда: ее занимаетъ только мѣсто этого труда среди другихъ душевныхъ переживаній учащагося. И она можетъ констатировать только то, что безъ интереса къ этому труду не будетъ вниманія къ нему, не будетъ радости труда, радости преодолѣнія его трудостей, не будетъ и той работы,

которая даетъ учащимся возможность запомнить то, чему ихъ учатъ, не будетъ творчества въ этомъ трудѣ, т. е. не будетъ того, что представляетъ собою естественное содержанiе душевныхъ переживанiй при нормальномъ ихъ теченiи. Психологiя должна намъ сказать, что «скоро·сказка сказывается, но не скоро дѣло дѣлается».

Но этимъ еще не исчерпывается содержанiе ариѳметики: въ него входитъ рѣшенiе учащимися сотенъ сложныхъ и замысловатыхъ задачъ, не интересныхъ, безъ нужды неестественныхъ, не отвѣчающихъ запросамъ учащихся и не считающихся съ мѣрою ихъ вниманiя и вкуса къ распутыванiю клубка придуманныхъ ad hoc хитросплетенiй. Но на этомъ я здѣсь останавливаться не буду. Несвоевременныя занятiя этого рода, съ точки зрѣнiя психологическихъ требованiй, зло.

Перейдемъ къ такъ наз. курсу элементарной алгебры, насколько это возможно при бѣгломъ очеркѣ интересующихъ насъ требованiй психологiи. Въ этомъ курсѣ къ учебному матерiалу неизбѣжно присоединяется новый рядъ опредѣленiй, выростаетъ рядъ теоремъ, новыя условныя обозначенiя, новыя понятiя и появляются фиктивныя, созданныя человѣческимъ интеллектомъ, въ силу требованiй неизвѣстной учащимся цѣлесообразности, «числа» sui generis, иногда даже противорѣчащiя такъ наз. «здравому смыслу». Напр., нуль больше всякаго отрицательнаго числа, $-1 < +1$ и т. п. Получается какъ бы «парадоксъ», что такъ какъ $(-1).(-1)$ равняется $(+1).(+1)$, то произведенiе двухъ меньшихъ чиселъ, равно произведенiю двухъ большихъ,—«парадоксъ», изъ затрудненiй котораго учащiйся не въ силахъ, при своемъ умственномъ развитiи, выйти побѣдителемъ. Получается противорѣчiе въ поведенiи учителя, всегда требующаго, чтобы учащiйся разсуждалъ и «думалъ», что́ онъ говоритъ, а иногда требующiй, чтобы учащiйся не углублялся въ тонкости, и въ то же время предлагающiй ему множество тонкостей для усвоенiя. Говорить учащимся въ однихъ случаяхъ: «разсуждайте, думайте!», а въ другихъ: «не разсуждайте, не задумывайтесь надъ этимъ», конечно, можно. Но дѣлу математическаго образованiя этотъ совѣтъ не поможетъ. Приходится прибѣгать къ такимъ прiемамъ, которыя отвѣчаютъ требованiямъ не одной только

логики, но которыя согласовались бы и съ требованіями психологіи. А такими пріемами являются всѣ дозволительныя геометрическія и механическія интерпретаціи, которыя отобразили бы геометрическій, механическій, до извѣстной степени реальный, хотя и условный, смыслъ опредѣленій, принятыхъ въ наукѣ въ цѣляхъ надлежащей конструкціи вопроса о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами извѣстной природы. Если считать, что натуральныя числа даны, а числа другой природы (нуль, числа дробныя, отрицательныя и положительныя, комплексныя вида $a+bi$ и ирраціональныя) суть числа фиктивныя, то придется признать, что учителю математики надо посмотрѣть на фикціи разнаго рода не только съ логической и гносеологической, но и съ психологической точки зрѣнія. Во всякомъ случаѣ для учащихся фикція, какъ средство къ познанію и описанію фактовъ, совершенно недоступна въ силу ихъ естественной склонности къ самому наивному интуитивизму.

Обратимся къ геометріи. Въ этомъ учебномъ предметѣ особенно настойчиво культивируется стремленіе раздѣлить всѣ предложенія геометріи на аксіомы, теоремы, задачи, а теоремы—на собственно теоремы, слѣдствія, леммы. Въ геометріи болѣе, чѣмъ въ курсѣ алгебры средней школы, господствуетъ прямо культъ, для учащихся мало понятный, доказательства во что бы то ни стало. Фигуры здѣсь предполагаются идеальныя, опять-таки фиктивныя. Но понятіе объ идеальныхъ фигурахъ предполагаетъ уже достаточный запасъ опыта и наблюденій надъ фигурами не идеальными. Необходимость точныхъ опредѣленій можетъ быть сознана учащимися только при условіи, что онъ уже доросъ до уразумѣнія того, для чего они нужны. Для чего доказываютъ предложенія совершенно безспорныя при данныхъ условіяхъ (противъ бо́льшаго угла треугольника лежитъ бо́льшая сторона, и т. п.), учащіеся геометріи не только на первыхъ ступеняхъ обученія, но и впослѣдствіи не понимаютъ. Многіе изъ нихъ этого понять и не въ состояніи. Поэтому они относятся къ геометрическимъ доказательствамъ съ отвращеніемъ, что отнюдь не способствуетъ ни ихъ благополучію, ни ихъ мышленію, ни ихъ творчеству, ни ихъ успѣхамъ. Указанные недочеты и многіе изъ не ука-

занныхъ въ самомъ процессѣ усвоенія геометріи учащимися зависятъ, большею частью, отъ невниманія къ психологіи мышленія, впрочемъ, еще очень мало разработанной. А, между тѣмъ, извѣстно, что пространственныя воспріятія предшествуютъ счету: маленькія дѣти, еще не умѣющіе говорить (не только считать!), вѣрно указываютъ портреты родныхъ и знакомыхъ и отлично различаютъ большой кусокъ сахару отъ маленькаго. Вся бѣда въ томъ, что то количество и качество пространственныхъ воспріятій и представленій, которое находится въ распоряженіи всякаго приступающаго къ занятіямъ геометріей, считается достаточнымъ для «прохожденія» съ ними курса Евклидовой геометріи. Между тѣмъ, эти воспріятія и представленія недостаточны и въ количественномъ, и въ качественномъ отношеніяхъ для достиженія цѣли. А та высота логическаго усилія, на которую учитель хочетъ сразу поднять учащихся, для нихъ недоступна. Учащіеся либо выучиваютъ слова, либо падаютъ духомъ, и дѣло кончается тѣмъ, что у учащихся по геометріи оказывается и мало познаній, и мало навыковъ, что геометрія для нихъ не была ни школою мышленія и логическаго доказательства, ни школою пространственнаго воображенія. Причина такихъ результатовъ кроется въ отсутствіи у учащихся интереса къ подобнымъ занятіямъ и радости труда надъ преодолѣніемъ логическихъ и другихъ трудностей предмета.

Цѣль моего доклада—не проектированіе новыхъ программъ и учебныхъ плановъ. Съ такими предложеніями выступятъ на съѣздѣ другія лица. Я былъ бы безконечно счастливъ, если мнѣ хоть отчасти удалось освѣтить необходимость считаться съ тѣмъ, что, съ точки зрѣнія психологической, математика, какъ учебный предметъ, не можетъ имѣть въ виду только умъ и логическое мышленіе учащагося и требованія чисто-логическаго построенія, такъ наз., элементарной математики.

На другихъ отдѣлахъ учебнаго курса математики я останавливаться не буду и не могу. Укажу только на то, что идеи предѣла, ирраціональнаго числа, «безконечно-малой» величины, методъ доказательства отъ противнаго, методъ доказательства съ помощью такъ наз. «математической» индукціи.

требуютъ особенно осторожной и тщательной, во всѣхъ отношеніяхъ, обработки, прежде чѣмъ сдѣлаться достояніемъ учащихся. При этомъ не подлежитъ никакому сомнѣнію, что полной научности и строгости курса средней школы достигнуть не въ состояніи. Точнѣе говоря: учитель, вооружившись самъ всѣмъ арсеналомъ орудій, доставляемыхъ наукой въ этихъ вопросахъ, конечно, можетъ прочесть рядъ лекцій по этимъ вопросамъ своимъ хлопающимъ глазами и ушами ученикамъ. Но ученики при этомъ ничего себѣ ни усвоятъ изъ всѣхъ рѣчей учителя и ничего въ этихъ рѣчахъ не поймутъ. Да и вообще отъ всего курса математики почти никакого толку не будетъ, если учащій не будетъ считаться съ требованіями психологическими.

Требованія, которыя психологія можетъ предъявлять къ обученію математикѣ, сводятся, приблизительно, къ слѣдующему:

1) Воспріятія вообще, и математическаго порядка въ частности, предшествуютъ представленіямъ и имъ сопутствуютъ; представленія частныя предшествуютъ и сопутствуютъ общимъ; представленія общія предшествуютъ и сочувствуютъ понятіямъ и идеямъ; въ то же время представленія, понятія и идеи являются важнымъ условіемъ для надлежащей апперцепціи воспріятій; правъ Кантъ, утверждая, что «интуиціи безъ понятій слѣпы, а понятія безъ интуицій безсодержательны, пусты»; а потому учить надо такъ, чтобы ученики пользовались всѣми этими переживаніями, а не оперировали бы только надъ словами и отвлеченными понятіями;

2) Воспріятія, представленія и даже понятія и идеи очень часто сопровождаются и должны сопровождаться чувствованіями (удовольствія или неудовольствія, радости или огорчеяін и т. п.,—смотря по отношенію къ нимъ со стороны испытывающаго эти переживанія и эти продукты своей душевной дѣятельности); они ведутъ и должны вести къ извѣстнымъ сужденіямъ или къ ряду ихъ, къ нѣкоторымъ желаніямъ и стремленіямъ и къ нѣкоторымъ поступкамъ или дѣйствіямъ въ широкомъ смыслѣ этого слова, а дѣйствія и поступки, какъ бы завершающіе данный психическій процессъ, въ свою очередь, являются началомъ новаго цикла душевныхъ пере-

живаній, ведущихъ къ дальнѣйшей работѣ и т. д.; вслѣдствіе этого, раздѣленіе занятій математикой на теоретическія и практическія только отчасти пріемлемы въ математикѣ, какъ учебномъ предметѣ, ибо навыки, съ одной стороны, требуютъ теоретической основы, а теорія, со своей стороны, требуетъ основы практической; сверхъ того, стремленіе учащихъ математикѣ оказывать воздѣйствіе только на умъ и отвлеченное мышленіе учащихся обречено на безрезультатность въ силу того, что потокъ психическаго процесса захватываетъ всѣ области психическихъ переживаній учащагося, не ограничиваясь исключительно одною ихъ областью;

3) Возрастъ дѣтскій (лѣтъ до 12-ти у однихъ расъ, лѣтъ до 13-ти у другихъ,—это зависитъ и отъ климата, и отъ массы другихъ условій,—предъявляетъ къ учителю математики одни требованія; возрастъ, заключенный между началомъ полового созрѣванія и его наступленіемъ, предъявляетъ другія требованія; наконецъ, третій возрастъ — юношескій — новыя требованія.

4) Изъ этого раздѣленія возраста учащихся въ школѣ на три періода еще не слѣдуетъ, что каждый возрастъ свободенъ отъ особенностей другого; какъ показываетъ опытъ, признаки, такъ наз., «инфантилзности» встрѣчается и въ возрастахъ дальнѣйшихъ, и чаще всего **всякій** учащійся математикѣ является всегда болѣе или менѣе начинающимъ учиться, а не законченнымъ математикомъ, умѣющимся учиться; учиться математикѣ не научаются даже въ возрастѣ юношескомъ и въ возрастѣ зрѣломъ (напр., въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ); недостаточно только учиться, надо научиться учиться;

5) Такъ называемое преподаваніе математики, какъ таковое, требуетъ отъ учащихся такой мѣры активнаго вниманія, которое, большею частью, является результатомъ продолжительной работы и многихъ другихъ условій и значительной емкости ума и воображенія и силы воли; поэтому надо **не преподавать** математику, а **учить** ей всѣми доступными учителю и цѣлесообразными для учащихся способами;

6) Готовыя наглядныя пособія и такъ наз. наглядность и конкретность пріемовъ обученія полезны для снабженія учащихся нѣкоторыми, болѣе или менѣе, пассивными воспрі-

ятіями, для выработки нѣкоторыхъ представленій; но для надлежащаго обученія математикѣ они далеко не достаточны: необходимо, чтобы учащіеся сами изготовляли тѣ наглядныя пособія, изготовленіе которыхъ лежитъ въ предѣлахъ ихъ навыковъ въ ручномъ трудѣ (въ широкомъ смыслѣ этого слова); это требованіе приводитъ къ необходимости отведенія ручному труду подобающаго ему мѣста также въ обученіи математикѣ и къ необходимости вниманія къ такъ наз. «лабораторной» методѣ обученія этому предмету;

7) Не съ отвлеченныхъ опредѣленій, не съ провозглашенныхъ теоремъ и провозглашаемыхъ учителемъ доказательствъ этихъ теоремъ должна начинаться работа учащихся надъ каждой методической единицей (это противорѣчитъ роли творческаго труда въ душевной жизни человѣка), а съ такой активной работы учащихся, которая постепенно вводитъ учащихся in medias res вопроса; только систематизаціонная работа на высшихъ ступеняхъ обученія можетъ итти тѣмъ порядкомъ, который систематизаціи подобаетъ; воспитаніе воли учащихся и привитіе имъ приличествующихъ цѣлямъ обученія чувствованій и привычекъ дѣйствованія столь же необходима, какъ умѣніе его судить и разсуждать въ вопросахъ математическаго содержанія, и гораздо важнѣе, чѣмъ одно только умѣніе «отвѣчать» на вопросы учителя рядъ соотвѣтствующимъ требованіямъ минуты словъ;

8) Методы обученія (не преподаванія!) должны въ математикѣ сообразовываться не со схематическимъ раздѣленіемъ курса математики на обособленные отдѣлы (ариѳметики, алгебры, геометріи и т. д.), а съ самымъ содержаніемъ и существомъ вопросовъ, подлежащихъ изученію, съ цѣлями обученія, съ составомъ класса, его вкусами и интересами и т. д.;

9) Пріемы обученія должны считаться съ существованіемъ, въ каждомъ классѣ, учащихся разныхъ типовъ («оптиковъ», «акустиковъ», «механиковъ» и типовъ смѣшанныхъ); поэтому пріемы обученія должны быть столь разнообразны, чтобы каждый учащійся нашелъ свой путь къ усвоенію даннаго вопроса, сообразный съ требованіями его типа, и имѣлъ бы возможность посмотрѣть на всякій вопросъ также съ болѣе или менѣе чуждой его натурѣ точки зрѣнія;

10) Хотя раздѣленіе возраста учащагося на три періода болѣе или менѣе схематично, но періодъ полового созрѣванія не подлежитъ сомнѣнію, и въ этотъ періодъ надо споспѣшествовать надлежащему (въ области умственной, волевой, эмоціональной и эстетической дѣятельности) разряду накопляющейся въ этотъ періодъ болѣе или менѣе бурной энергіи въ сторону активной, творческой работы по изготовленію наглядныхъ математическихъ пособій, чертежей, графиковъ и т. п.;

11) Эмоціи, препятствующія нормальному ходу психической жизни учащагося (страхъ, уныніе, смущеніе, чувства обиды, оскорбленія, униженія и т. п.) и вредно отзывающіяся (особенно при занятіяхъ математикой, требующихъ, такъ сказать, всего человѣка) даже на физіологическихъ функціяхъ органовъ человѣческаго тѣла, въ обученіи вообще не умѣстны. и въ частности не умѣстны при обученіи математикѣ;

12) Если вѣрно то мнѣніе Ж. Ж. Руссо, по которому воспитаніе есть искусство терять время для того, чтобы его потомъ выиграть, то въ дѣлѣ математическаго образованія этимъ искусствомъ учитель долженъ владѣть въ значительной степени; для того же, чтобы въ немъ достигнуть достаточнаго совершенства, учитель долженъ быть внимательнымъ къ требованіямъ психологіи и сродниться съ интересами этой области человѣческаго знанія; къ этому насъ, учителей математики, обязываетъ наша профессіональная честь и этика и вообще этика педагогическая.

Будемъ же, мм. г-ни и мм. гг., учиться психологіи; будемъ работать надъ пріобрѣтеніемъ надлежащихъ психологическихъ взглядовъ на обученіе, которое должно итти на пользу ввѣренныхъ намъ учащихся поколѣній, на пользу русской школы и на пользу нашей дорогой родины!»

Пренія по докладу Шохоръ-Троцкаго.

А.П. Некрасовъ. (Спб.) „Мы выслушали чрезвычайно интересный докладъ весьма опытнаго педагога, и я не могу не выразить своего чувства удовлетворенія по поводу этого интереснаго доклада, но вмѣстѣ съ тѣмъ я позволю себѣ внести въ вопросъ другую точку зрѣнія не прямо противоположную, но нѣсколько отличную.

Я позволю себѣ назвать мою точку зрѣнія по топографическому признаку Московской. Въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ я имѣлъ честь усвоить эту точку зрѣнія какъ наслѣдіе отъ высокоуважаемыхъ педагоговъ, Давидова и Бугаева. Вы изволили выслушать взглядъ глубоко уважаемаго главы Казанской математической школы проф. А. В. Васильева. Отъ Казанской математической школы Московская отличается взглядомъ на Лобачевскаго, своимъ освѣщеніемъ трудовъ этого всемірнаго генія. Московская математическая школа въ лицѣ проф. Цингера, моего учителя, высказала свои взгляды на съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ блестящей рѣчи: „О недоразумѣніяхъ во взглядахъ на аксіомы", цитированной въ моей элементарной книгѣ—„Приложеніе алгебры къ геометріи", истолковывающей систему Лобачевскаго именно въ качествѣ иносказательной. Отъ школы, только что высказавшейся въ лицѣ С. И. Шохоръ-Троцкаго, мы отличаемся и другими характерными чертами, но я остановлюсь на одной изъ нихъ и для этого возьму лишь одинъ пунктъ изъ рѣчи многоуважаемаго Семена Ильича. Онъ, напр., такъ формулировалъ одинъ изъ своихъ штриховъ: „взгляды Гербарта не увѣнчались успѣхомъ". Московская математическая школа въ лицѣ проф. Бугаева и его продолжателей смотритъ на это иначе. Она можетъ утверждать, что въ математикѣ психологическіе взгляды Гербарта увѣнчались значительнымъ успѣхомъ. Въ Россіи труды учениковъ Бугаева, какъ Шишкинъ (см. „Вопросы философіи и психологіи"), В. Г. Алексѣевъ (см. „Сборникъ Учено-Литературнаго Общества при Императорскомъ Юрьевскомъ Университетѣ"), въ Германіи труды Штрюмпеля, Фехнера, антрополога Ранке и др. все болѣе и болѣе разрабатываютъ и утверждаютъ направленіе Гербарта".

„Я позволю себѣ формулировать то, чего съ нашей точки зрѣнія, требуетъ психологія и философія отъ математики, если мы хотимъ преподавателей математики возвести въ достоинство преподавателей философской пропедевтики. Требованія психологіи отъ математики съ точки зрѣнія Московской группы, какъ я ее понимаю, выражены весьма широко и точно: психологія требуетъ отъ математики развитія въ ученикѣ не только извѣстнаго реализма, но и гуманизма и идеализма, какъ его понимаютъ великіе педагоги Песталоцци, Гербартъ, Ушинскій и группа московскихъ педагоговъ—Давидовъ, Бугаевъ, Лѣтниковъ, Цингеръ, Слудскій, Шишкинъ и другіе. Геометрія развиваетъ зрѣніе физическаго глаза; это, конечно, весьма необходимо, но совершенно недостаточно. У ребенка и юноши есть еще зрѣніе мысли съ ея высшими понятіями и измѣреніями, зрѣніе довѣрія и уваженія къ чужому „я" и къ себѣ. Это зрѣніе – совершенно другого порядка. Его развиваетъ особая группа математическихъ дисциплинъ,

именно—теорія чиселъ, исчисленіе вѣроятностей съ его законами чиселъ и взаимоотношеній, и символическое исчисленіе, являющееся родственникомъ филологіи, рѣшающимъ съ извѣстной точностью проблему цѣнности и другія высшія проблеммы біологической ариѳметики и гуманизма. Всю эту вторую группу способностей ребенка и юноши нельзя развить обыкновенной геометріей, ея логикой и ея интуиціей, но ее можно и должно развить иносказательной геометріей, которую Бугаевъ называетъ числовой геометріей, а Морисъ д'Окань и другіе инженеры—номографическимъ исчисленіемъ".

„Тутъ найдетъ себѣ достойное мѣсто и иносказательная геометрія Лобачевскаго, великаго русскаго пангеометра, но не геометра въ буквальномъ смыслѣ. Между прочимъ, мою книгу «Вѣра, знаніе и опытъ», если позволитъ Организаціонный Комитетъ, въ количествѣ 50 или болѣе экземпляровъ я передамъ для наиболѣе интересующихся этимъ направленіемъ. Отсюда можно почерпнуть много матеріаловъ для упражненій въ средней школѣ для развитія высшихъ понятій ученика. Лѣтъ болѣе 10 тому назадъ былъ съѣздъ учителей математики и физики, организованный мною вмѣстѣ съ проф. исторіи Виноградовымъ. То, что я говорю, отчасти есть повтореніе съ нѣкоторымъ развитіемъ того, что было, но теперь это сказано блѣднѣе. Кто хочетъ глубже проникнуть въ мысли Московской математической и психологической школы, пусть обратиться къ «Математическому сборнику» и другимъ трудамъ этой группы".

IV. Экспериментальныя проблеммы въ педагогикѣ математики.

Докладъ В. Р. Мрочека (Спб.).

«Вопросъ, котораго я хочу коснуться въ своемъ докладѣ, столь обширенъ и имѣется столь богатая о немъ литература, что одинъ только перечень работъ занялъ бы весь мой докладъ. Поэтому я приступилъ къ этому докладу съ извѣстнымъ чувствомъ страха, но, къ счастью, мнѣ удалось найти сотрудника, съ которымъ я раздѣлилъ свой трудъ пополамъ. Этимъ сотрудникомъ является пр.-доц. Нью-Іоркскаго Университета, д-ръ Радосавльевичъ. Его работа въ настоящее время печатается въ одномъ петербургскомъ журналѣ, именно—въ «Обновленіи Школы». Поэтому я ограничусь въ докладѣ упоминаніемъ тѣхъ резюме по психологіи ариѳметики, безъ которыхъ

обойтись невозможно. Чтобы показать, насколько обширна литература, упомяну, что Радосавльевичъ въ своей работѣ приводитъ главные труды, относящіеся къ ариѳметикѣ, въ количествѣ 260. Слѣдовательно, литература уже достаточно обширна. Что касается вопроса о психологіи математическаго преподаванія, то начну съ его вступительныхъ словъ.

«Самое поле педагогики математики огромно. Вопросы ея—и многочисленны, и сложны. Авторы ихъ также многочисленны и разныхъ взглядовъ. Даже и тѣ, которые очень поверхностно слѣдятъ за современной педагогикой математики, замѣтятъ, что прошло то время, когда можно было писать о школьной математикѣ только со спеціально-математической (научной) точки зрѣнія. Современная экспериментальная, біологическая и педагогическая психологія подчеркиваютъ ясно, что эта научная точка зрѣнія должна быть дополнена и другими воззрѣніями. Я здѣсь не буду касаться этого вопроса, но зато съ большимъ удовольствіемъ констатирую, что въ настоящее время существуетъ нѣсколько направленій въ области математики».

Теперь позвольте перейти къ содержанію своего доклада. На первомъ мѣстѣ стоитъ изученіе *числовыхъ представленій* на младшихъ ступеняхъ обученія и даже въ дошкольномъ возрастѣ. По этому вопросу имѣется масса литературы. Такъ, одни авторы занимаются спеціально изученіемъ возникновенія числовыхъ представленій, другіе работаютъ надъ генезисомъ числа, третьи занимаются вопросами понятія числа и пространства и проблеммами развитія числовыхъ воспріятій, особая категорія занимается изученіемъ такъ называемыхъ великихъ счетчиковъ, у которыхъ особенно рѣзко проявляются вычислительныя способности. Разрабатывались вопросы о процессахъ навыка, вниманія, ассоціаціи, о созерцаніи чиселъ, патологическія явленія, порождаемыя изученіемъ ариѳметики, способность вычисленія и память на числа, ариѳметическія упражненія и проблеммы формальнаго характера, гигіена и дидактика ариѳметики. Всѣ эти вопросы достаточно разработаны, но я долженъ повторить то, что говоритъ Радосавльевичъ: есть много авторовъ, есть много направленій, но окончательнаго слова не сказано. Да это и понятно: психологія

математическаго преподаванія разрабатывается еще такъ недавно и только недавно вступила на путь объективнаго изслѣдованія; но въ этомъ самомъ—залогъ ея дальнѣйшаго развитія и залогъ успѣха.

Что касается начальнаго развитія числовыхъ представленій, то съ этимъ русская публика достаточно знакома по работамъ Лая, въ которыхъ даны основныя проблеммы и намѣчены основанія ихъ рѣшенія. Я поэтому останавливаться на этихъ работахъ не буду, но укажу между прочимъ, что этой проблеммой занималась и Американская психологическая школа въ лицѣ своихъ выдающихся представителей-профессоровъ, главнымъ образомъ, Клеркскаго университета. Одной изъ такихъ извѣстныхъ работъ является работа проф. Чарльза Брауна: *) «Психологическое изученіе нѣкоторыхъ сторонъ вниманія и ассоціаціи въ простыхъ ариѳметическихъ процессахъ». Время не позволяетъ мнѣ вдаваться въ детали постановки этихъ опытовъ, но болѣе подробныя свѣдѣнія будутъ напечатаны въ одной изъ моихъ дальнѣйшихъ работъ.

Что касается моей задачи, то я укажу на тѣ разнообразныя стороны, на которыя было обращено вниманіе экспериментаторами при изслѣдованіяхъ; напр., въ сложеніи было изучено сложеніе простыхъ единицъ, удовлетворяющее образнымъ представленіямъ, роль сознанія въ сложеніи, ошибки спеціальнаго характера, общаго характера, чувство точности, чувство времени, сравнительная легкость и трудность комбинированія чиселъ. отношеніе величины слагаемаго къ трудности комбинацій, сложеніе десятковъ, суммированіе вообще, сложеніе комбинацій чиселъ и т. д. Подобнымъ образомъ были изучены и остальныя дѣйствія. Вообще выводы можно формулировать слѣдующимъ образомъ. Взрослые люди, прошедшіе среднюю школу, надъ которыми и производились опыты Брауна, даютъ цѣлый рядъ типичныхъ ошибокъ при дѣйствіяхъ, причемъ ни одно вычисленіе не сопровождается отсутствіемъ моторныхъ проявленій, такъ какъ одинъ шепчетъ про себя тѣ числа, надъ которыми производится вычисленіе, другой

*) Интересное совпаденіе: четыре Брауна работаютъ надъ вопросами, разсматриваемыми въ настоящемъ докладѣ.

непремѣнно рефлекторно повторяетъ какое-нибудь движеніе рукой, ногой или головой въ тактъ дѣйствіямъ, которыя производитъ, иной непремѣнно долженъ довольно внятнымъ шепотомъ повторять то, что́ дѣлаетъ, особая группа должна записывать карандашемъ, не будучи въ состояніи сидѣть спокойно и производить вычисленія. Эти и тому подобныя наблюденія показали, что ариѳметическія вычисленія непремѣнно связаны съ моторизаціей въ большей или меньшей степени.

Къ этому вопросу тѣсно примыкаютъ и изслѣдованія въ области такъ называемой гигіены умственной дѣятельности при занятіяхъ ариѳметикой и вообще математикой. Въ настоящее время существуетъ нѣсколько крупныхъ работъ по этому вопросу, и одна изъ нихъ, содержащая сводъ всѣхъ матеріаловъ, появилась недавно — весной текущаго года въ американскомъ психологическомъ журналѣ «Pedagogical Seminary», редактируемомъ Стенли Холломъ; она переведена на русскій языкъ въ одномъ петербургскомъ журналѣ «Народное Образованіе». Это работа проф. Бурнхэма «Гигіена умственной дѣятельности при занятіяхъ ариѳметикой». Затѣмъ довольно обширныя изслѣдованія задуманы на ту же тему проф. Будапештскаго университетаРаншбургомъ. Они еще не закончены и поэтому я сообщу данныя лишь опубликованныхъ работъ. Онъ хочетъ рѣшить вопросы: какъ относится сумма успѣховъ по счисленію къ возрасту, т. е. количество вѣрныхъ рѣшеній къ опредѣленному классу учениковъ и къ степени способности, обозначаемой обычными у насъ школьными отмѣтками; какъ относится опредѣленность усвоенія (объективная увѣренность) къ возрасту и къ степени способности; какъ относится продолжительность счета къ возрасту и степени способности; каковъ размѣръ, увѣренность и продуктивность успѣховъ въ счетѣ при различныхъ элементарныхъ видахъ счета (1 и 2 ступени) отдѣльныхъ группъ возраста и способностей; затѣмъ, можно ли этимъ путемъ опредѣлить трудности отдѣльныхъ видовъ счета и ихъ послѣдовательность, можно ли ихъ объяснить; можно ли согласно этому опредѣлить основной минимумъ способностей къ счету 7—9 лѣтнихъ школьниковъ; каково отношеніе между всѣми изложенными факторами у малоспособныхъ; каково отношеніе успѣховъ самыхъ сла-

быхъ въ счетѣ среди нормальныхъ къ успѣхамъ мало способныхъ, и т. д. Часть этихъ проблеммъ изслѣдована Раншбургомъ и его учениками и опубликована въ различныхъ журналахъ заграницей. Далѣе я долженъ указать на работы въ другомъ направленіи, тоже тѣсно примыкающія къ преподаванію ариѳметики и вообще математики, напр. на книгу, появившуюся на русскомъ языкѣ, проф. Висконсинскаго университета О'Ши. Онъ затрагиваетъ вопросъ о гигіенѣ умственной дѣятельности съ той стороны, съ какой у насъ вопросъ не затрагивался. При обученіи математикѣ учащимся приходится выполнять довольно много письменныхъ работъ. Съ первыхъ годовъ обученія приходится имѣть дѣло съ грифельной доской, затѣмъ съ бумагой и перомъ. Спрашивается, насколько вредны эти письменныя упражненіо для дѣтей? И вотъ разнообразные опыты, поставленные различными психологами, вообще сводятся къ слѣдующему. Вопросъ идетъ о расходованіи экономномъ или не экономномъ энергіи. Оказывается, что очень гладкая поверхность вызываетъ безполезную трату энергіи, такъ какъ въ этомъ случаѣ невозможно писать безъ чрезмѣрнаго напряженія мускуловъ. Грифельная доска—это вѣроятно наиболѣе разорительная принадлежность школьной жизни. Царапающихъ перьевъ нужно избѣгать. Помимо производимаго ими раздраженія нервной системы, они требуютъ такого осторожнаго обращенія, что при этомъ невозможно избѣгнуть безполезной траты энергіи. О'Ши не разъ наблюдалъ, что никто не можетъ писать долго такимъ перомъ, не обнаруживая утомленіе.

Если человѣкъ занимается математикой, то въ его мозгу возникаетъ особенная дѣятельность какой-нибудь опредѣленной части и чѣмъ болѣе вниманіе человѣка сосредоточено на данномъ предметѣ, тѣмъ болѣе онъ разбирается въ тонкихъ соотношеніяхъ и быстрѣе работаетъ его голова. Въ неврологическомъ смыслѣ это обозначаетъ, что мозговая инерція въ опредѣленныхъ мѣстахъ побѣждена. Если вы предоставите вниманію произвольно переходить на что-нибудь другое, оно должно возбуждать бездѣятельныя области, которыя въ данный моментъ, должны бы оставаться пассивными, а на это тратится какъ время, такъ и жизненныя силы. Цѣлый рядъ изслѣдо-

вателей Моссо, Ломбаръ, Стенли Холлъ, Бинэ и Анри, Ангель и Томпсонъ и др., занимались вопросомъ о томъ, насколько вліяютъ ариѳметическія вычисленія на дѣятельность спеціально мозговую. Моссо первый употреблялъ для этой цѣли очень остроумный приборъ—вѣсы, у которыхъ обѣ чашки представляли платформу, на которую ложился испытуемый. По мѣрѣ того, какъ ему давались для рѣшенія какія-нибудь ариѳметическія задачи и онъ старался рѣшать ихъ, вѣсы наклонялись въ сторону головы: это являлось слѣдствіемъ прилива крови къ головѣ. Эти опыты интересны тѣмъ, это испытуемому давались задачи приблизительно одного содержанія, и по мѣрѣ того, какъ опредѣленный типъ усваивался, наклоненіе въ сторону головы уменьшалось и, наконецъ, наступалъ день, когда приливовъ не наблюдалось. Отсюда вывели заключеніе, что какъ только типичная задача усвоилась, мозговой механизмъ не работаетъ, и отсюда вытекаетъ, что психологи — противъ задачъ типичныхъ и по правиламъ.

Относительно тѣхъ вычисленій, которыя производятся въ въ младшихъ классахъ и съ которыми приходится считаться врачамъ и психіатрамъ, можно вкратцѣ сказать слѣдующее. Были произведены нѣкоторыя изслѣдованія въ Германіи, Америкѣ и Англіи и оказалось, что какъ разъ не тѣ учебныя заведенія процвѣтаютъ по ариѳметикѣ, гдѣ больше отводится часовъ въ недѣлю на преподаваніе. По изслѣдованіямъ Стона, Райса и др. оказалось, что тамъ, гдѣ было удѣлено 14% школьнаго времени на ариѳметику, успѣхи оказались гораздо лучше, чѣмъ тамъ, гдѣ было 16—18%. Тамъ же, гдѣ было 12%, успѣхи оказались ниже. Отсюда выведено заключеніе, что много удѣлять времени на занятія ариѳметикой не слѣдуетъ, ибо это ведетъ къ совершенно противоположнымъ результатамъ. 16—14% въ этомъ отношеніи очень показательны.

Затѣмъ цѣлый рядъ изслѣдованій былъ произведенъ надъ явленіемъ ариѳмоманіи. Это печальное явленіе школы состоитъ въ томъ, что дѣти, привыкшіе къ постояннымъ умственнымъ вычисленіямъ, рѣшеніямъ мелкихъ задачъ, сложеніямъ и вычитаніямъ, которыя безконечной вереницей текутъ при рѣшеніи этихъ задачъ, начинаютъ совершенно безсознательно во всякій моментъ жизни считать, присчитывать, отсчитывать и

т. д. У болѣе нервныхъ и слабыхъ натуръ это ведетъ къ опредѣленному заболѣванію, къ такъ называемой ариѳмоманіи. Очень большія и подробныя наблюденія въ Америкѣ, Англіи и Германіи показали, что муштровка въ одномъ и томъ же направленіи счета и пересчитыванія ведетъ къ тому, что умъ начинаетъ дѣйствовать тоже однообразно, именно—ассоціаціи начинаютъ складываться по одному опредѣленному направленію. Вотъ примѣръ, приводимый д-ромъ Триплетомъ: дѣвочка, обращаясь къ матери, сказала: «Я дошла до того, что когда я ѣду по улицамъ, то вижу въ окнахъ комбинаціи чиселъ»; увидѣвши однажды подругу въ новомъ платьѣ, она вскричала: «У тебя на платьѣ комбинація 5». Рисунокъ матеріи припомнилъ ей фигуру, при помощи которой она изучала число 5. Дальнѣйшее развитіе этой ариѳмоманіи—умственный автоматизмъ. Оказывается, что въ многолюдномъ классѣ можно всегда найти нѣсколько субъектовъ такого типа. Это доказываетъ, какъ осторожно нужно относиться къ чрезмѣрнымъ упражненіямъ въ этой области.

Воспріятія формъ тоже изслѣдованы въ настоящее время многими работами. Я позволю себѣ привести простое резюме этихъ работъ. Установлено, что зрительные центры развиваются ранѣе другихъ, болѣе специфицированныхъ. Это доказываетъ, что геометрію нужно начинать прежде всего съ зрительныхъ образовъ: «Мы видимъ формы въ значительной степени сквозь призму двигательныхъ навыковъ». Это доказываетъ, что изученіе формъ нужно начинать лѣпкой моделей, вырѣзываніемъ, склеиваніемъ, чтобы познать ихъ осязательнымъ путемъ и затѣмъ получить опредѣленныя представленія о формахъ. Работы Гирига, Бенусси, Моймана, Бинэ, Бирфлита и др. установили, что глазомѣръ въ 6—7 лѣтъ немного уступаетъ глазомѣру взрослаго. Слѣдовательно, пространственныя соотношенія можно изучать въ довольно раннемъ возрастѣ. Мойманъ идетъ далѣе и утверждаетъ, что къ 6 годамъ эта способность развита вполнѣ достаточно. По вопросу о пособіяхъ при изученіи формъ важную роль сейчасъ занимаетъ вопросъ объ окраскѣ приборовъ. Цѣлый рядъ изслѣдованій въ этой области показалъ, что реакціи на краски у дѣтей и взрослыхъ совершенно различны. Опредѣленный цвѣтъ вызы-

ваетъ опредѣленныя ощущенія. Такъ, напр., можно вызвать и сердцебіеніе, можно увеличить мускульную силу, сдѣлать болѣе глубокимъ дыханіе и т. п. Оказывается, что маленькія дѣти болѣе всего радуются желтымъ и оранжевымъ цвѣтамъ, а, между тѣмъ, въ зрѣломъ возрастѣ люди находятъ эти цвѣта слишкомъ яркими. Если мы расположимъ въ порядкѣ цвѣта, которымъ отдаютъ предпочтеніе маленькія дѣти 3 — 12 лѣтняго возраста, то получаются болѣе мягкіе тона по мѣрѣ того, какъ дѣти становятся старше.

Какія формы наиболѣе знакомы? Въ этомъ отношеніи психологи и логики рѣзко расходятся. Вы знаете, что Песталоци въ основу изученія формъ положилъ четыреугольникъ; Гербартъ, когда сталъ развивать систему Песталоци, положилъ треугольникъ и его книга о наглядномъ обученіи построена на различныхъ операціяхъ надъ треугольникомъ, какъ основной формой. Довольно долго думали, что нужно начинать съ треугольника, такъ какъ это понятіе наиболѣе простое и господствуетъ въ другихъ формахъ; но подробныя изслѣдованія путемъ такъ называемыхъ тестовъ (особенныхъ опросовъ), напр., опыты Гартмана, когда въ теченіе 4 лѣтъ было изслѣдовано 1312 дѣтей, показали, что треугольникъ былъ знакомъ 128, кругъ—564, а шаръ—1056, причемъ четыреугольникъ занимаетъ среднее мѣсто между шаромъ и кругомъ. Цѣлый рядъ опытовъ въ этомъ направленіи (я упомянулъ объ Аннабергскихъ, потому что они извѣстны), повторенныхъ въ настоящее время, показали, что общій выводъ правиленъ: треугольникъ менѣе знакомъ дѣтямъ, чѣмъ четыреугольникъ и шаръ. Такимъ образомъ логически простое и психологически простое въ данномъ случаѣ расходятся, и на эту сторону я предложилъ бы обратить особенное вниманіе не только въ области изученія формъ, но и вообще въ области всей методики начальнаго обученія. Намъ приходится различать 2 простоты: логическую, къ которой приспособленъ умъ взрослаго человѣка, умѣющаго разсуждать опредѣленнымъ образомъ, и психологическую, связанную опредѣленнымъ порядкомъ развитія представленій и понятій у дѣтей. Такимъ образомъ почти 60-лѣтній споръ между Гербартомъ и Песталоци рѣшенъ въ пользу Песталоци. Песталоци не имѣлъ въ

своемъ распоряженіи опытныхъ данныхъ, которыя имѣются сейчасъ, но онъ понималъ, какая форма должна быть ближе дѣтямъ. Можетъ быть въ этомъ кроется секретъ того успѣха, который выпалъ на долю ученія Песталоцци.

Я перейду къ отдѣлу, который вызываетъ наибольше споровъ въ области математическаго преподаванія и является краеугольнымъ камнемъ новыхъ системъ. Я говорю о роли активности въ математикѣ. Этимъ вопросомъ занимались самыя разнообразныя группы ученыхъ, между прочимъ невропологи и психопатологи; они установили основной пунктъ, въ силу котораго считаютъ теперь ручной трудъ общеобразовательнымъ методомъ. Изслѣдованія Флексига, Мерсье, Дональдсона и др. привели къ слѣдующему положенію: «организація мозга въ началѣ такова, что всѣ пути ведутъ прямо къ двигательной области». Болтонъ въ своей большой работѣ «О зависимости между моторизаціей и интеллектомъ» устанавливаетъ, что «умственное развитіе и двигательная способность идутъ рука объ руку». Я не буду больше останавливаться на вопросахъ о рефлексахъ и объ ихъ значеніи для нашего предмета, потому что объ этомъ будетъ говорить слѣдующій докладчикъ, П. Д. Енько. Цѣлый рядъ основательныхъ работъ устанавливаетъ, что «сложность мышленія и двигательные процессы обратны другъ другу». Что это значитъ? Здѣсь возникаетъ вопросъ объ утилизаціи нервной энергіи. Чѣмъ сложнѣе тотъ процессъ, который должно обработать мыслительнымъ путемъ, тѣмъ больше нужно задержать наши рефлексы, тѣмъ больше должно сидѣть неподвижно; но это достигается лишь въ болѣе позднемъ періодѣ жизни. Съ этой точки зрѣнія правъ О'Ши, который говоритъ, что «ребенокъ думаетъ мускулами», правъ Холлъ, что «мышленіе—это подавленіе мускульныхъ усилій», правъ Фере, что «когда мозгъ находится въ дѣйствіи, все тѣло мыслитъ», и вся психо-физическая школа, которая говоритъ, что къ мышленію, какъ чистому процессу, мы приходимъ черезъ цѣлый рядъ двигательныхъ процессовъ. Я сейчасъ продемонстрирую нѣсколько кривыхъ, которыя показываютъ, насколько ручной трудъ, какъ общеобразовательное средство, помогаетъ намъ преодолѣть двѣ важныя задачи воспитанія: 1) поднятіе общей работоспособности, и 2) воспитаніе воли, а вы

знаете, что современная педагогика ставитъ воспитаніе воли на первый планъ. Эти опыты, часть которыхъ я продемонстрирую, были сдѣланы въ Галиціи, гдѣ въ 37 среднихъ школахъ уже введены мастерскія ручного труда. И вотъ изслѣдованія надъ учениками старшихъ классовъ средней школы показали ясно, насколько успѣхи въ ручномъ трудѣ и успѣхи учебные, оцѣниваемые нашими 5, 4, 3 и 2, идутъ рука объ руку. Въ Галиціи, благодаря почину д-ра Іордана, устроены мастерскія, въ которыхъ ученики, приходящіе на 1—2 часа, занимаются опредѣленной работой. Подобныя же мастерскія введены уже и въ 18 среднихъ школахъ въ Варшавскомъ Учебномъ Округѣ.

Такимъ образомъ, не зная ученика, по той работѣ, которую онъ выполняетъ, зафиксированной опредѣленнымъ приборомъ, легко установить, насколько продуктивны его школьныя занятія. Въ какой мѣрѣ вопросъ о ручномъ трудѣ сейчасъ разработанъ, можно судить по опубликованному въ прошломъ году (1910) большому изслѣдованію Вейлера о взаимоотношеніи между мускульной силой и мускульнымъ трудомъ. Тамъ онъ устанавливаетъ опредѣленный законъ, напоминающій законъ Вебера-Фехнера: «выполненіе мускульной работы относится къ способности ея выполненія, какъ логариѳмъ выполненной работы». Такимъ образомъ логариѳмическое отношеніе устанавливается и здѣсь. Оказывается, что способность можетъ быть гораздо больше, чѣмъ степень выполненія. Я упоминаю это для того, чтобы вамъ показать, насколько не только качественно, но и количественно изученъ уже этотъ вопросъ. При всякой работѣ, будетъ ли это мускульная или физическая, появляется нервно-мускульное утомленіе, появляется такъ называемое токсинное утомленіе, напоминающее ядовитые токсины при другихъ заболѣваніяхъ. Я упомяну объ извѣстныхъ опытахъ Моссо, Вейхарда и др. надъ собаками и мышами: если впрыснуть антоксины животнымъ, то они парализуютъ токсинное утомленіе и данный субъектъ какъ бы оживаетъ вновь. Оказывается, что при ручномъ трудѣ волевая энергія увели-

[1]) Въ 1911 г. было произведено изслѣдованіе 25 учащихся старшихъ классовъ средней школы при помощи метронома эргографа и міографа. Результаты, какъ видно изъ демонстрированныхъ діаграммъ, ясно показали, что планомѣрный ручной трудъ повышаетъ общіе успѣхи.

чивается и ведетъ къ выработкѣ бо̀льшаго количества антитоксиновъ, иначе, тѣ субъекты, которые занимаются правильно поставленнымъ ручнымъ трудомъ, имѣютъ организмы болѣе устойчивые и болѣе обезпечены въ борьбѣ съ токсинами, чѣмъ люди, занимающіеся исключительно умственнымъ трудомъ. По вопросу объ утомленіи, отдыхѣ и снѣ мы имѣемъ не менѣе важныя данныя. Одна работа была опубликована въ 1906 г. Это анкета, которую провелъ международный журналъ Enseignement Mathématique между математиками всѣхъ странъ. Изъ этой анкеты оказывается, что 45 человѣкъ должны спать 8 часовъ въ сутки и только 11 человѣкъ 6—7 час., если хотятъ успѣшно заниматься какой либо работой. Параллельныя изслѣдованія врачей установили болѣе или менѣе точно слѣдующее: ребенокъ 5—8 лѣтъ долженъ спать 11—12 час., 9 — 10 лѣтъ — 10 — 11 час., 11 — 13 лѣтъ — 9 — 10 час., 14 — 15 лѣтъ — $8^1/_2$ — 9 час. Это показываетъ, насколько вопросъ объ утомленіи связанъ съ вопросомъ о времени, отводимомъ на сонъ и на такъ называемое приготовленіе уроковъ. Можетъ быть, будутъ теперь понятны тѣ возгласы, которые раздаются рѣшительно въ Америкѣ и отчасти на материкѣ Европы противъ задаванія на домъ уроковъ по математикѣ, требующихъ 2—3 часа на ихъ приготовленіе.

Что касается активнаго и пассивнаго обученія, то по этому вопросу имѣемъ цѣлый рядъ капитальныхъ работъ Лойдъ Моргана, Вундта, Грооса и др. Вундтъ подробно разбиралъ этотъ вопросъ и установилъ слѣдующій фактъ: всякій разъ какъ происходитъ пассивное воспріятіе готовыхъ понятій, напр., въ математикѣ при изученіи готовыхъ правилъ, опредѣленныхъ типовъ задачъ и т. п., появляется въ организмѣ физіологическое чувство страданія, чувство непріятнаго, «Gefühl des Erleidens»; всякій разъ, какъ происходитъ активное напряженіе, стремленіе къ опредѣленной цѣли, появляется чувство удовлетворенія, «Lusttätigkeitsgefühl», которое дѣйствуетъ возбуждающимъ образомъ на организмъ. Если съ этимъ сопоставить данныя, клонящіяся къ выясненію такъ называемаго понogенетическаго коэффиціента (коэффиціента утомляемости), то математика займетъ безъ сомнѣнія весьма почетное, но печальное мѣсто. Наибольшій коэффиціентъ 100

даетъ наша школьная математика, все равно—производились-ли изслѣдованія въ Германіи (Вагнеръ, Кемзисъ) или въ Японіи (Сакаки).

Есть еще вопросы, которыхъ нужно было бы коснуться болѣе подробно, но я боюсь утомить ваше вниманіе, тѣмъ болѣе, что объ этихъ вопросахъ въ нѣсколькихъ словахъ довольно трудно сказать. Поэтому я ограничусь слѣдующимъ упоминаніемъ. Относительно развитія сужденій и умозаключеній въ настоящее время существуетъ достаточно большая литература и въ краткихъ словахъ ея данныя можно формулировать слѣдующимъ образомъ. До 14 лѣтъ способность къ умозаключеніямъ у нормальныхъ дѣтей почти отсутствуетъ. Начинать обученіе этимъ вопросамъ можно не ранѣе 14—15 лѣтъ. Желающіе могутъ найти довольно матеріала по этому вопросу у Моймана; есть цѣлый рядъ и другихъ работъ, между прочимъ рядъ такъ называемыхъ тестовъ, произведенныхъ въ разныхъ странахъ. Я сошлюсь на опросъ, произведенный въ Америкѣ Каролиной Ле-Роу. Она хотѣла выяснить, насколько вліяетъ на психику дѣтей въ смыслѣ ихъ развитія логически простое: что даетъ преподаваніе математики, начинающееся съ опредѣленій и готовыхъ правилъ или образцовъ. Я привожу эти образцы не съ цѣлью надъ ними иронизировать, потому что это печальное явленіе, но эти образцы заслуживаютъ вниманія, чтобы показать, насколько мы еще стоимъ на вредномъ пути. Я буду прямо читать отвѣты: «Вычитаніе есть уменьшенное число и вычтенный конецъ».

«Когда получаются два равныхъ числа, это называется умноженіемъ».

«Сложенное число это то же самое, что и первый числитель».

«Куртажемъ называется вознагражденіе за разбитіе бутылокъ или утечку изъ нихъ жидкости».

«Страхованіе—это, когда вы умираете или ваши деньги сгораютъ и страховая компанія платитъ вамъ».

«Биржа въ Европѣ это, когда вы ѣдете чрезъ Лондонъ, Парижъ и другія мѣста».

«Вѣсъ земли опредѣляется сравненіемъ массы извѣстнаго свинца съ массой свинца неизвѣстнаго».

«Аберраціей называется, если мы увидѣвъ звѣзду стрѣляемъ въ нее и выстрѣлъ не попадаетъ въ ея центръ, но въ сторону».

«Звѣзды покрыли бы все небо, если бы онѣ были разсѣяны по нему, поэтому астрономы пришли къ заключенію— распредѣлить ихъ по созвѣздіямъ».

Общая сводка мнѣній по этому вопросу можетъ быть формулирована такъ: «до 15 лѣтъ время дѣйствовать; послѣ будетъ достаточно времени для размышленія».

Что касается психологіи математическихъ способностей, интуиціи и логики въ математикѣ, то и здѣсь имѣются уже нѣкоторые положительные принципы. По вопросу о психологіи математическихъ способностей существуетъ большая, довольно исчерпывающая работа проф. Лессинга. Въ ней онъ устанавливаетъ распредѣленіе всѣхъ людей на типы естественниковъ и математиковъ и находитъ, что исторія наукъ показываетъ, что когда развивается естествознаніе, то абстрактная математика приходитъ въ упадокъ. Затѣмъ онъ устанавливаетъ, что есть умы, способные къ воспитанію въ одномъ направленіи и есть умы, способные къ воспитанію въ другомъ направленіи, а именно—есть типы интроспективные и типы экстроспективные. Наконецъ онъ устанавливаетъ, что математикъ обладаетъ не абстрактнымъ, а скорѣе конкретнымъ умомъ. Другіе изслѣдователи: французскій философъ Бруншвигъ, посвятившій этому вопросу большую работу, Клейнъ, писавшій по тому же вопросу, Пуанкаре и другіе приходятъ къ тому же заключенію, что есть 2 рѣзко выраженныхъ типа: одинъ думаетъ, начиная съ конкретнаго (интроспективный типъ); онъ желаетъ, прежде чѣмъ перейти къ выводу, сдѣлать модель и потомъ только разсуждаетъ по поводу ея. Другой отбрасываетъ всѣ представленія въ сторону и начинаетъ съ уравненій и системы уравненій. Въ этомъ отношеніи представляетъ характерную фигуру Клейнъ. Ему приходилось изслѣдовать Римановы функціи, и вотъ что онъ сдѣлалъ. Онъ по поверхности доски насыпалъ опилокъ и смотрѣлъ, какъ будутъ располагаться опилки подъ вліяніемъ тока. Тѣ кривыя, которыя онъ получилъ, послужили исходной точкой для веденія его работъ. Что дѣлаетъ Софусъ Ли, когда ему приходится создавать новые пути въ геометріи? Онъ

составляетъ цѣлую систему дифференціальныхъ уравненій и на основаніи общаго рѣшенія (интегрированія) этихъ уравненій даетъ матеріалъ, который Клиффордъ осуществляетъ въ своей модели. Я ограничусь цитатой изъ письма Эрмита къ Штильтьесу (8 Мая 1890 г.), гдѣ онъ подчеркиваетъ это различіе: «Я не смогу вамъ описать, на какія усилія я былъ осужденъ, чтобы понять кое-что въ этюдахъ по начертательной геометріи, которую я ненавижу... Какъ счастливъ тотъ, кто можетъ думать лишь въ области анализа!»

Вотъ рѣзко выраженный типъ аналитика, которому даже непонятно значеніе математическихъ представленій въ области начертательной геометріи.

Теперь я долженъ сказать нѣсколько словъ о тѣхъ путяхъ изученія всѣхъ этихъ проблеммъ, о которыхъ я говорилъ въ началѣ своего конспекта. Эти пути разнообразны: опросы, анкеты и тесты, за которые высказывается большая группа изслѣдователей, путь единичнаго лабораторнаго изслѣдованія, массовыя изслѣдованія, которыя производятся въ такъ называемыхъ новыхъ школахъ Европы и Америки. На эти массовыя изслѣдованія должно направиться вниманіе учителей: эти новыя школы, это — лабораторіи въ большихъ размѣрахъ, въ которыхъ можно проводить новыя мысли и методы. (Снимки изъ дѣятельности нѣкоторыхъ школъ были продемонстрированы).

Я, кажется, использовалъ отведенное мнѣ время и могу только благодарить васъ за то вниманіе, съ которымъ вы меня выслушали. Позвольте закончить мое сообщеніе слѣдующимъ. Въ началѣ XIX в. возникло движеніе, какъ реакція противъ Песталоци, и выразитель его, Мартинъ Омъ, говорилъ: «Я хотѣлъ бы обладать краснорѣчіемъ Демосѳена или Цицерона, чтобы изгнать изъ нашихъ (не однѣхъ только гимназій, но и всѣхъ) нѣмецкихъ учительскихъ семинарій, реальныхъ, элементарныхъ и городскихъ школъ господствующій въ нихъ предразсудокъ, будто слѣдуетъ, вмѣсто элементовъ научной геометріи, проходить курсъ наглядной геометріи, т. е. давать, вмѣсто упражняющей всѣ духовныя силы человѣка строго научной математики, скудно и односторонне развивающіе суррогаты... Если бы Песталоци или Шмидъ испытали, насколько строго науч-

ная математика доступна и интересна десятилѣтнимъ дѣтямъ, то они не сбились бы съ пути».

И въ такомъ же духѣ шло все обученіе математикѣ въ первую половину XIX вѣка съ легкой руки Іоганна Шульце, около 30 лѣтъ державшаго въ своихъ рукахъ судьбы народнаго просвѣщенія въ Германіи. Ему принадлежитъ классическая фраза, что «въ одномъ строчкѣ Корнелія Непота заключается болѣе образовательнаго матеріала, чѣмъ въ 20 математическихъ формулахъ». Но жизнь отвергла этотъ взглядъ и педагоги повели борьбу на два фронта: за выясненіе практическаго значенія и за установленіе практическихъ методикъ математики. И современная математика дала теперь отвѣтъ Мартину Ому и иже съ нимъ: да, строго научная математика недоступна дѣтямъ!»

Конспектъ.

1. Задачи эксперимента въ математикѣ: a) изучить развитіе представленій и понятій, b) изучить методы математической работы, c) изслѣдовать взаимоотношенія интуиціи и логики, d) дать сравнительную оцѣнку различныхъ методическихъ принциповъ.

2) Различные виды дидактическихъ и психологическихъ экспериментовъ: a) лабораторныя — единичныя и групповыя — изслѣдованія, b) классные опыты, c) тесты, d) школьныя колоніи.

3) Результаты экспериментальныхъ изслѣдованій слѣдующихъ проблеммъ:

I. Развитіе числовыхъ представленій.
II. Изученіе вниманія и ассоціацій при простыхъ ариѳметическихъ процессахъ.
III. Гигіена умственной дѣятельности при занятіяхъ математикой.
IV. Воспріятіе, воспроизведеніе и изученіе формъ.
V. Роль активности въ школьной математикѣ.
VI. Психологія математическихъ способностей.
VII. Интуиція и логика въ математикѣ.
VIII. Способность построенія умозаключеній.

4. Важное значеніе школьныхъ колоній — лабораторій «Im Grossen»; результаты занятій. Нѣсколько иллюстрацій занятій по математикѣ въ «Новыхъ школахъ» Европы и Америки.

Примѣчаніе. Были показаны діапозитивы.

V. Новыя изслѣдованія по физіологіи центральной нервной системы и педагогика.

Докладъ П. Д. Енько (Спб.).

«Въ теченіи многихъ лѣтъ, въ институтѣ экспериментальной медицины, профессоромъ Павловымъ и его школой производятся изслѣдованія надъ образованіемъ и исчезновеніемъ условныхъ рефлексовъ у собакъ. Изслѣдованія эти пролили очень яркій свѣтъ на многія изъ, такъ называемыхъ, психическихъ явленій. Они пока не даютъ отвѣта на всѣ вопросы психологіи, но даютъ намъ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ: «въ чемъ состоитъ сущность воздѣйствій одного человѣка на другого» и въ частности—«въ чемъ состоитъ сущность педагогическихъ воздѣйствій при массовомъ обученіи въ школахъ».

Изъ нихъ вытекаетъ съ очевидностью, что все дѣло школьной педагогики сводится къ установленію условныхъ рефлексовъ, что все школьное умственное развитіе сводится только къ этому, только къ приспособленію мозговыхъ механизмовъ къ выполненію опредѣленныхъ работъ и только опредѣленныхъ, а не вообще какихъ бы то ни было.

Въ частномъ случаѣ обученія математикѣ дѣло сводится напр. къ тому, чтобы при видѣ двухъ предметовъ у ребенка появлялся рефлексъ на органы говоренія, и онъ произносилъ бы слово «два», или рефлексъ на руку, и онъ писалъ бы то же слово или цифру 2, и обратно; оно сводится къ тому, чтобы при видѣ, положимъ, цифры 2, крестика и еще цифры 2 у него появлялся рефлексъ на органы рѣчи, и онъ произносилъ бы слово «четыре», или же на руку, и онъ писалъ бы цифру 4; чтобы при взглядѣ на чертежъ кривой у него появлялись рефлексы на органы рѣчи или на руку, и онъ говорилъ бы или писалъ то, что̀ слѣдуетъ и т. д., и т. д.

Внутреннія явленія, субъективныя представленія о говоримомъ, дѣлаемомъ,—могутъ быть, но могутъ и не быть; мы ихъ не видимъ и судимъ о нихъ только по аналогіи съ самими собою, судя по своимъ переживаніямъ, предположительно. Но наши предположенія о нихъ могутъ быть глубоко ошибочны,

совсѣмъ не соотвѣтствовать истинному положенію дѣла. Въ опытахъ профессора Павлова мы видимъ, что собакѣ причиняютъ жесточайшую боль, а она смотритъ весело, очень весело, какъ будто ей даютъ ѣсть нѣчто очень вкусное; до такой степени можно извратить направленіе условныхъ рефлексовъ, до такой степени условные рефлексы могутъ не соотвѣтствовать нашимъ представленіямъ о переживаніяхъ, которыя должно бы вызывать данное воздѣйствіе. Поэтому и въ нашемъ частномъ случаѣ цѣлесообразность дѣйствій ребенка при отвѣтахъ и рѣшеніи задачъ вовсе не говоритъ въ пользу сознательнаго отношенія къ дѣлу, а только показываетъ цѣлесообразность установленныхъ учителемъ рефлексовъ. Только дальнѣйшее, именно—примѣненіе пріобрѣтенныхъ условныхъ рефлексовъ къ новымъ обстоятельствамъ, къ рѣшенію необычныхъ задачъ можетъ позволить сдѣлать предположеніе, что въ дѣйствіяхъ ученика участвовали не только установленные условные рефлексы, но и сознаніе и воля. Наблюденіе показываетъ, что это бываетъ рѣдко; учителю приходится объяснять каждый новый родъ задачъ снова, т. е. ему приходится на каждый новый случай устанавливать и новые условные рефлексы.

Созидая въ ребенкѣ условные рефлексы, мы можемъ идти по двумъ путямъ: мы можемъ имѣть въ виду только созиданіе такихъ условныхъ рефлексовъ, которые будутъ повторяться впослѣдствіи, или же мы можемъ заботиться преимущественно о внѣдреніи такихъ, которые не будутъ повторяться по выходѣ изъ школы, даже по переходѣ въ слѣдующій классъ, которые, поэтому, осуждены на исчезновеніе. Иначе говоря, передъ нами является тотъ же старый и вѣчно юный вопросъ о схоластическомъ развивательномъ направленіи, о занятіяхъ, нужныхъ для самой школы, и о естественномъ учебномъ направленіи, о занятіяхъ предметами, которыми придется заниматься и по оставленіи школы. Занимать ли учениковъ вещами безполезными, осложнять ли обученіе математикѣ разсужденіями, имѣющими значеніе только въ данной школѣ, при данныхъ учителяхъ, которыя при переходѣ къ инымъ учителямъ, въ школы иного направленія будутъ неизбѣжно забыты, будутъ даже служить

тормазомъ для пріобрѣтенія дальнѣйшихъ знаній, или же учить ихъ только тому, что всегда и вездѣ будетъ нужно, что остается въ программахъ, несмотря на измѣненія педагогическихъ взглядовъ?

Совсѣмъ недавно можно было еще думать, что мы, занимая учениковъ условно полезными разсужденіями, приносимъ имъ пользу, развиваемъ ихъ, усиливаемъ ихъ умственныя способности, научаемъ ихъ мыслить.

Но теперь, послѣ великихъ открытій въ педагогіи собаки, мы не можемъ болѣе утверждать этого. Теперь мы должны признать, что, обучая ребенка, мы увеличиваемъ число условныхъ рефлексовъ, улучшаемъ механизмъ мозга, приспособляя его къ новымъ родамъ работы, но только къ даннымъ, тѣмъ, которымъ мы учимъ, а не ко всякимъ. Поэтому, теперь не позволительно расходовать время ребенка на установленіе условныхъ рефлексовъ, осужденныхъ на исчезновеніе, на занятія, которыя не будутъ имѣть примѣненія по окончаніи ученія. То-есть мы должны теперь отказаться отъ, такъ называемаго, развивательнаго направленія и вернуться къ старому, учебному: давать дѣтямъ полезныя знанія, въ возможно большемъ количествѣ, возможно простыми способами, по возможности облегчая обученіе, то-есть образованіе и упроченіе нужныхъ условныхъ рефлексовъ.

Этотъ путь труденъ; сбиться съ него и перейти на старый, привычный, схоластическій, очень легко; стоитъ только задуматься не надъ облегченіемъ обученія, а надъ усовершенствованіемъ его.

Вѣдь всякое усовершенствованіе пріемовъ обученія, не имѣющее непосредственною цѣлью сокращеніе времени, нужнаго для пріобрѣтенія знаній по данному предмету, ведетъ къ замедленію обученія и составляетъ сущность схоластики-ученія для ученія. Оно ведетъ къ проложенію такихъ путей въ мозгу, которые впослѣдствіи не будутъ болѣе нужны.

Но и не сходя съ пути естественнаго, учебнаго направленія должно быть осторожнымъ и не увлекаться. Не забывайте, что то, что несомнѣнно полезно вамъ, какъ преподавателямъ математики, совершенно безполезно для будущихъ

врачей, юристовъ, земледѣльцевъ; что условные рефлексы, которые усвоили вы, которые сохраняются у васъ въ силу повторенія, по нуждамъ вашей профессіи, у людей иныхъ профессій безъ повтореній исчезнутъ очень быстро. Не забывайте, что емкость мозга ограничена, что всякое прокладываніе въ немъ путей для рефлексовъ, которые не будутъ нужны впослѣдствіи, ведетъ къ ограниченію мѣста для образованія путей для нужныхъ рефлексовъ; иначе говоря, не забывайте, что образованіе слишкомъ большого числа условныхъ рефлексовъ подавляетъ возможность дальнѣйшаго самостоятельнаго развитія. Все равно, будемъ ли мы заставлять повторять слова, излагающія чужія мысли по философіи математики, будемъ ли мы учить рѣшенію практически—полезныхъ задачъ, мы все равно не должны растягивать обученіе въ школѣ до безконечности, не должны перегружать дѣтей работой; мы должны оставить имъ время для самостоятельнаго развитія, для прокладыванія путей для тѣхъ рефлексовъ, которые имъ будутъ наиболѣе нужны по условіямъ жизни и свойствамъ организма каждаго.

Къ вамъ, къ Съѣзду, прислушивается вся Россія, рѣшенія ваши будутъ служить руководствомъ при установленіи программъ и методовъ, не увлекайтесь же логичностью разсужденій и помните, что не единою математикой живъ будетъ человѣкъ».

Пренія по докладамъ В. Р. Мрочека и П. Д. Енько.

А. П. Нечаевъ. (Спб.) „Сегодня съ этой каѳедры приводился цѣлый рядъ справокъ, показывающихъ, что современная психологія можетъ оказать извѣстную помощь въ смыслѣ разъясненія цѣлаго ряда вопросовъ, касающихся методовъ математики. Затѣмъ здѣсь было сдѣлано почтеннымъ представителемъ Московскаго Университета проф. Некрасовымъ очень цѣнное напоминаніе о томъ значеніи, которое имѣетъ для преподавателей математики Гербартъ и его взгляды. Мнѣ хочется напомнить, что однимъ изъ самыхъ великихъ завѣтовъ Гербарта было требованіе, чтобы всякое обученіе имѣло воспитательное значеніе. Если эту задачу мы будемъ пом-

нить, то намъ прежде всего станетъ яснымъ, что преподаванiе математики, какъ и преподаванiе всякаго другого предмета, тогда только будетъ успѣшно достигать своей цѣли, когда мы будемъ отдавать себѣ ясный отчетъ въ томъ влiянiи, которое оказываетъ наше преподаванiе на всю личность воспитанника, на весь ходъ его психическаго развитiя. Это влiянiе можетъ быть особенно цѣннымъ въ томъ случаѣ, когда будетъ координирована работа отдѣльныхъ преподавателей. Такой координацiи ближе всего можетъ способствовать изученiе психики учащихся. На этой общей почвѣ устанавливается общность педагогическихъ задачъ отдѣльныхъ членовъ учительской корпорацiи; такъ что съ точки зрѣнiя, выдвинутой представителемъ Московскаго направленiя, особенно цѣненъ тотъ призывъ къ изученiю психологiи, который былъ сдѣланъ со стороны почтеннаго С. И. Шохоръ-Троцкаго".

Я позволю себѣ привести маленькую справку относительно Павловскихъ опытовъ, о которыхъ сегодня много говорилось. Получившiе въ настоящее время мiровую извѣстность опыты проф. Павлова объ условныхъ рефлексахъ имѣютъ несомнѣнно очень большое значенiе для психологiи, потому что выясняютъ бiологическiя основанiя очень многихъ психологическихъ процессовъ запоминанiя, установленiя ассоцiацiй, утомленiя и т. д. Но когда мы оцѣниваемъ этотъ матерiалъ съ точки зрѣнiя педагогики, то мы должны этотъ матерiалъ учитывать такъ, какъ его учитываетъ самъ проф. Павловъ, именно—мы должны помнить, что эти изслѣдованiя касаются процессовъ, наблюдаемыхъ у собакъ, и конечно то, что наблюдается нами у собакъ, не можетъ считаться охватывающимъ всю ту сложную область психофизiологическихъ процессовъ, которую долженъ имѣть въ виду педагогъ. Конечно, если будетъ доказано, что какой-либо педагогическiй прiемъ явно противорѣчитъ тому, что наблюдается даже у собакъ, если мы увидимъ, что педагогъ въ своей работѣ нарушаетъ такiе бiологическiе законы, которые даже у собакъ могутъ ясно быть наблюдаемы, то мы должны этотъ прiемъ забраковать, но, съ другой стороны, устанавливая свои педагогическiе идеалы, мы не можемъ руководиться знанiемъ только того, чтó даетъ намъ наблюденiе надъ собаками. Наша задача заключается въ томъ, чтобы психику ребенка довести до высшихъ ступеней развитiя воли и разума. Нашимъ педагогическимъ идеаломъ должна быть душевная жизнь развитаго человѣка, а не душевная жизнь собаки, при какихъ бы тщательныхъ условiяхъ она ни наблюдалась. Возьмемъ отъ работъ проф. Павлова то, чтó онѣ дѣйствительно даютъ, но не будемъ дѣлать изъ нихъ произвольныхъ выводовъ".

Предсѣдатель. „Желая сконцентрировать пренiя по одному и

тому же вопросу Организаціонный Комитетъ находитъ необходимымъ продолженіе преній по сегодняшнимъ докладамъ назначить на 30 декабря, когда будутъ прочитаны еще доклады по тому же вопросу".

Докладъ М. Г. Попруженко: **«Анализъ безконечно-малыхъ въ средней школѣ»** помѣщенъ въ концѣ I части (см. оглавл.).

VI. Постановка преподаванія началъ анализа въ средней школѣ.

Докладъ Ф. В. Филипповича (Спб.).

«Наглядно-лабораторное обученіе, графики, функціональное мышленіе и начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій призваны реформировать традиціонное преподаваніе математики, какъ въ отношеніи содержанія, такъ и въ отношеніи методовъ.

Такъ какъ возраженія противниковъ реформы обученія математикѣ, между прочимъ, сводятся къ сомнѣніямъ и даже къ отрицаніямъ того, чтобы высшую математику можно было отнести къ предметамъ общаго образованія, то я позволю себѣ, по мѣрѣ возможности, разсмотрѣть этотъ вопросъ въ своемъ докладѣ.

I.

Необходимость введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу вытекаетъ:

а) изъ тенденціи сближенія науки со школой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ исторіи преподаванія намъ извѣстно, что развитіе науки всегда, хотя и съ большими опозданіями, вноситъ свой коррективъ въ школьныя программы. Но для того, чтобы провести реформу, необходима подготовительная работа обмѣна мнѣній, необходима суровая критика традиціоннаго обученія математикѣ.

За послѣднія десятилѣтія со стороны науки идутъ нападки на современное обученіе математикѣ. Представители на-

учнаго міра (Ф. Клейнъ, Пуанкаре, Борель, Таннери и др.) горячо нападаютъ на отсталость школьной математики отъ науки. Дѣйствительно, средняя школа игнорируетъ почти все развитіе математики, начиная съ XVII столѣтія. Изъ всего богатства методовъ, внесенныхъ въ европейскую науку со времени эпохи Возрожденія, только логариѳмы получили право гражданства. Такимъ образомъ, курсъ алгебры въ нашихъ гимназіяхъ заканчивается математическими открытіями начала XVII ст. Такъ какъ по взглядамъ новой педагогики одна изъ задачъ общаго образованія есть «способность понимать все наше культурное развитіе», то очевидно, что такая цѣль не можетъ быть достигнута безъ расширенія математическихъ знаній.

Итакъ, учащихся не слѣдуетъ искусственно задерживать на средневѣковомъ уровнѣ математики, и тогда мы успѣемъ ихъ познакомить съ великими открытіями творцовъ европейской математики; труды Декарта, Лейбница и Ньютона имъ будутъ извѣстны хотя бы въ самыхъ общихъ чертахъ.

b) Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій должны быть призваны освѣжить школьную математику также и соотвѣтственно запросамъ жизни. Прошли безвозвратно тѣ добрыя старыя времена, когда возможно было обходиться безъ азбуки высшей математики. Теперь даже медики на своихъ собраніяхъ восклицаютъ: «давайте намъ побольше математики! Старый путь черезъ Эвклида къ Декарту и Лейбницу слишкомъ длинный и трудный. Сократите этотъ далекій путь по мѣрѣ возможности!» Г. Гельмгольцъ, А. Фикъ и Бернштейнъ въ Германіи давно указывали на необходимость расширенія школьнаго преподаванія не только по общеобразовательнымъ причинамъ, но также и въ пользу изученія медицины и вообще пониманія движущихъ силъ нашего современнаго развитія. Химію, физику, технику, страховое дѣло и проч. можно понять лишь въ слабой степени, если не имѣть хотя бы незначительныхъ свѣдѣній изъ области высшей математики. Но если мы желаемъ проникнуть глубже въ тайны вышеупомянутыхъ наукъ, то мы непремѣнно должны воспользоваться орудіемъ анализа безконечно-малыхъ. По словамъ

проф. Дж. В. А. Юнга, «исчисленіе безконечно-малыхъ есть ученіе объ измѣненіяхъ и можетъ быть названо, въ строгомъ смыслѣ слова, математикой природы». Вообще безъ высшей математики явленія природы вполнѣ поняты быть не могутъ. Стало быть начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій должны войти въ общеобразовательный курсъ средней школы, ибо они даютъ намъ великолѣпное орудіе въ руки, чтобы удовлетворять запросамъ жизни.

c) И соображенія общепедагогическаго характера говорятъ въ пользу введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу. На основаніи своей практики могу утверждать, что этотъ новый отдѣлъ возбуждаетъ въ высшей степени интересъ у учащихся къ изученію математики. А интересъ есть критерій пригодности той или другой части курса школьной математики. Ключъ настоящей реформы есть интересъ. И поэтому курсъ математики долженъ быть предложенъ ученикамъ въ наиболѣе интересной для нихъ формѣ.

Кромѣ того, въ курсѣ исчисленія безконечно-малыхъ и формальная цѣль будетъ хорошо представлена. Здѣсь лучше всего подчеркивается всемогущество математическаго метода. Въ самомъ дѣлѣ, какой отдѣлъ математики можетъ изящнѣе показать, что путемъ индукціи открывается законъ явленій, затѣмъ выражается зависимость, лежащая въ его основѣ въ формѣ математической функціи и подъ конецъ переносится изслѣдованіе въ область непогрѣшимой дедукціи математическаго анализа. Математика является какъ бы отвлеченной формой естествознанія, и въ данномъ случаѣ она, дѣйствительно, дисциплинируетъ мышленіе нашихъ учениковъ, даетъ драгоцѣнный матеріалъ для упражненія въ строго-логическомъ мышленіи. А это какъ разъ соотвѣтствуетъ новымъ взглядамъ на преподаваніе математики, т. е. тому, чтобы въ старшихъ классахъ средней школы преобладали логическія тенденціи. Слѣдовательно, цѣнность началъ исчисленія безконечно-малыхъ коренится въ томъ, что она является воплощеніемъ дѣйствительно существующихъ соотношеній, связываетъ реальный міръ съ математическимъ. Воспитательное значеніе

анализа безконечно-малыхъ признается не только въ новыхъ французскихъ программахъ по математикѣ, но и въ Германіи, Англіи, Америкѣ, Австріи и др. начала анализа включены въ минимумъ требованій по математикѣ для средней школы.

II.

Въ связи съ введеніемъ анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу возникаютъ разногласія по поводу построенія самого курса. Новые французскіе учебные планы, «Меранская» программа въ Германіи и др. настаиваютъ на введеніи идеи функціональной зависимости. Реформаторы всѣхъ направленій присоединяются къ этому требованію. Дѣйствительно, объяснить какое-нибудь явленіе въ природѣ — это значитъ выяснить его генезисъ и связь съ другими явленіями. Въ виду этого лучше всего развивать идею функціональной зависимости (закономѣрности) въ математикѣ. Ученіе о функціяхъ есть центральное ученіе всей математики, потому что функціональная зависимость есть математическое выраженіе великаго закона измѣняемости соотношенія всѣхъ явленій; установленіе ея есть сущность и конечная цѣль всей науки. Поэтому мы, сторонники реформы, требуемъ, чтобы весь курсъ математики былъ сконцентрированъ около идеи функціональной зависимости и расширенъ первоначальными понятіями анализа безконечно-малыхъ. Стало быть, начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій не должны составлять самостоятельнаго отдѣла — «ученія о функціяхъ» — и являться какой то «надстройкой» надъ школьнымъ курсомъ, такъ наз., элементарной математики. Практика показала, что такая метода (надстройки) преподаванія анализа безконечно-малыхъ теряетъ свою воспитательную и общеобразовательную цѣнность. Анализъ безконечно-малыхъ въ такомъ родѣ не только не возбуждаетъ и не поддерживаетъ интересъ къ математикѣ у учащихся, но даже и усваивается очень трудно.

Раньше еще, до начала анализа безконечно - малыхъ должны мы подготовлять почву для яснаго, отчетливаго и возбуждающаго новыя идеи — преподаванія элементовъ диф-

ференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Нѣкоторыя способности у учащихся поддаются развитію только въ извѣстномъ возрастѣ, разъ этотъ моментъ будетъ упущенъ, тогда довольно трудно наверстать пропущенное. Въ виду этого еще съ младшихъ классовъ средней школы на урокахъ ариѳметики, геометріи, алгебры,... слѣдуетъ проводить красной нитью въ теченіи всего курса школьной математики идею функціональной зависимости. Въ этомъ-то и заключается точное пониманіе аналитической геометріи и началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. «Послѣднія являются вѣнцомъ этого широкаго метода» (Ф. Клейнъ).

III.

Въ самомъ началѣ анализа безконечно-малыхъ мы должны исходить изъ болѣе конкретныхъ и простыхъ задачъ. Цѣлесообразно подобранными примѣрами изъ естествознанія слѣдуетъ проиллюстрировать учащимся, что изслѣдованіе какого нибудь явленія сводится къ достиженію двухъ результатовъ: а) найти общій законъ, выражающій ходъ этого явленія (функцію) и в) опредѣлить скорость измѣненія этого явленія природы въ каждый произвольно взятый моментъ (производную).

Цѣлью преподаванія высшей математики въ средней школѣ ни въ какомъ случаѣ не должно быть только усвоеніе механизма, техники дифференцированія и интегрированія. При такой методѣ начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій потеряли бы всю свою общеобразовательную и воспитательную цѣнность. Тоже самое можно было бы сказать, если бы весь курсъ анализа состоялъ изъ доказательствъ теоремъ и примѣненій ихъ къ дифференціаламъ и интеграламъ.

По моему мнѣнію, мы должны воспользоваться задачами изъ физики, химіи, техники и др., чтобы на нихъ выяснить происхожденіе основныхъ понятій дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Напримѣръ, какая-нибудь задача изъ естествознанія даетъ намъ возможность составить функцію, изобразить ее графически, затѣмъ изслѣдовать и подъ конецъ найти ея производную. Подходя такимъ образомъ къ понятію

о производной, мы всегда должны выяснять въ чемъ сущность задачи дифференціальнаго исчисленія и давать наглядное представленіе (графическое изображеніе). Послѣ графическаго изображенія идетъ—идея и понятіе производной, а подъ конецъ—терминъ и символъ производной.

При такой системѣ преподаванія ученики вникаютъ въ математичность жизни природы и видятъ наглядно, какое колоссальное значеніе математики со стороны ея метода. Далѣе, при изученіи анализа, ученикамъ предоставляется большой просторъ, чтобы проявить свою самостоятельную работу, самодѣятельность и постоянно дѣлать умозаключенія. Кромѣ того, такой порядокъ вещей не сводитъ начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій къ собранію непонятныхъ значковъ и символовъ, какъ утверждаютъ нѣкоторые противники введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу. Но въ этомъ-то и состоитъ задача педагогики — сдѣлать науку понятной, заставить ее говорить простымъ, обыкновеннымъ языкомъ. «Нѣтъ мысли, которую нельзя было бы высказать просто и ясно» (А. И. Герценъ). Въ самомъ дѣлѣ, кто слѣдилъ за учебной заграничной литературой въ теченіи послѣднихъ 25 — 30 лѣтъ, тотъ можетъ констатировать, что всюду замѣчается стремленіе къ упрощенію изложенія матеріала. Достаточно сравнить новѣйшія учебныя книги со старыми. То же самое можно утверждать и относительно школьныхъ программъ и учебныхъ плановъ. Что касается русскихъ учебниковъ по анализу безконечно-малыхъ, то въ этомъ отношеніи дѣло обстоитъ довольно плохо. Всѣ эти учебники для средней школы построены приблизительно по одному типу. Съ начала идетъ сухое изложеніе понятія о функціи, затѣмъ подраздѣленіе функцій, теоремы о предѣлахъ, непрерывность функцій, производная и дифференціалъ и т. д. Такое построеніе курса анализа наврядъ ли можетъ вызывать интересъ у учащихся. Нѣкоторые французскіе и нѣмецкіе учебники могли бы послужить хорошимъ примѣромъ, какъ надо составлять учебное руководство по анализу безконечно-малыхъ для средней школы.

Какъ всякій отдѣлъ математики, такъ и анализъ безко-

нечно-малыхъ долженъ быть построенъ концентрически. Еще съ V класса при графическомъ изображеніи эмпирическихъ функцій мы должны подготовлять почву для дифференціальнаго счисленія. А въ VI и VII классахъ при проведеніи идеи функціональной зависимости на урокахъ алгебры слѣдуетъ учащихся знакомить съ понятіемъ о производной, а на урокахъ геометріи съ понятіемъ объ интегралѣ.

Въ VIII классѣ—связный обзоръ изученныхъ въ предыдущихъ классахъ функцій и элементы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

IV.

Ученіе о производной должно быть разрабатываемо съ различныхъ точекъ зрѣній. Прежде всего, разсматривая равномѣрное и неравномѣрное движеніе, мы подводимъ учащихся къ понятіямъ о постоянной скорости, средней скорости въ опредѣленный промежутокъ времени и скорости для нѣкотораго момента t. Такимъ образомъ, вводя понятіе о скорости измѣненія въ ученіе о функціяхъ, мы устанавливаемъ аналогію съ механическими процессами движенія. Сначала скорость есть производная пути по времени, на другомъ примѣрѣ у насъ получится, что скорость химической реакціи есть производная количества реагирующаго тѣла по времени, далѣе, по извѣстной формулѣ расширенія отъ теплоты, мы можемъ опредѣлить коэффиціентъ расширенія какъ мѣру скорости, съ которой идетъ процессъ расширенія при равномѣрномъ нагрѣваніи. Конечно, и другіе примѣры должны показать учащимся, какія разнообразныя задачи приводятъ насъ къ понятію о производной.

При помощи такихъ конкретныхъ задачъ можно одолѣть и другія методическія трудности въ началѣ ученія о производной, въ родѣ напр. того, что 1) отношеніе двухъ безконечно-малыхъ можетъ быть равно конечному и 2) предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближеніи Δx къ нулю для данной зависимости между y и x можетъ быть вычисленъ.

Аналогично выше-приведенному и задача о направленіи

касательной къ параболѣ и т. п. должна показать учащимся, какъ можно подойти къ производной съ геометрической точки зрѣнія. Графически изображая какую-нибудь математическую функцію (напр. $y = x^2$) и опредѣляя направленіе касательной при помощи tangens'а угла, образуемаго касательной съ осью x, ученики приходятъ къ заключенію, что истинная скорость измѣненія ординатъ кривой въ какой-нибудь точкѣ равна угловому коэффиціенту касательной.

Сравнивая на частныхъ случаяхъ и числовыхъ примѣрахъ полученные результаты:

угловой коэффиціентъ $A = \frac{y' - y}{x' - x}$ при $x' = x$ и $V = \frac{s' - s}{t' - t}$ при $t' = t$

т. е. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{ds}{dt}$

мы должны изъ этого извлечь въ чистомъ математическомъ видѣ понятіе о производной. Слѣдовательно, послѣ разнообразныхъ частныхъ примѣровъ и примѣненій производныхъ, мы обобщаемъ понятіе о производной въ видѣ формулы

$$lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Авторы русскихъ учебниковъ начинаютъ анти-педагогично понятіе о производной, т. е. съ конца: даютъ опредѣленіе производной при помощи отношенія $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$, а потомъ слѣдуютъ примѣры на отысканіе производной и дифференціала.

Итакъ общее методическое положеніе, по моему мнѣнію, цѣлесообразно и здѣсь, при прохожденіи ученія о производной: «сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило».

V.

Въ преподаваніи математики вообще, а при прохожденіи интегральнаго исчисленія въ частности не слѣдуетъ давать одну только картину полнаго расцвѣта, безъ указаній на первые, робкіе шаги, послужившіе для этого развитія. Въ этомъ отношеніи развитіе науки иногда можетъ намъ оказать большую методическую услугу.

Методъ истощенія (Эвдоксъ Книдскій, 408—355 до Р. Х.) и законъ Кавальери (1598—1647) могутъ еще въ систематическомъ курсѣ геометріи VI и VII кл. сыграть роль пропедевтики для интегральнаго исчисленія.

Таннери (въ Revue Pedagogique, іюль, 1903 г.) совѣтуетъ, напр., сдать разсужденіе, которымъ пользуются при доказательствѣ равенства объемовъ призмъ наклонной и прямой, «въ историческій музей, какъ свидѣтельство того, насколько развиты были наши предки». Онъ сообщаетъ два способа замѣны этого доказательства. «Первый состоитъ въ томъ, что призмы разрѣзаютъ на тонкіе слои или изготовляютъ призмы изъ бумаги. При помощи такихъ моделей можно сдѣлать ученикамъ доказываемыя положенія «ясными, какъ день». Второй способъ превосходенъ, но требуетъ замѣтнаго напряженія. Онъ состоитъ въ изученіи нѣкоторыхъ вопросовъ интегральнаго исчисленія до того, какъ мы приступимъ къ измѣренію этихъ объемовъ. Интегральное исчисленіе! Въ средней школѣ! Да, я не шучу. Усиліе, требующееся для того, чтобы ознакомиться съ производной и интеграломъ и съ тѣмъ, какъ при помощи этихъ удивительныхъ орудій можно вычислять поверхность и объемы, будетъ не столь значительнымъ, какъ тѣ усилія, которыя приходится дѣлать для установленія равновеликости прямой и наклонной призмъ или двухъ пирамидъ (чертежъ извѣстный въ гимназическихъ кругахъ подъ названіемъ «чортовой лѣстницы), и затѣмъ эти невыносимые объемы тѣлъ вращенія. По сей даже день я не знаю выраженія объема тѣла, получающагося при вращеніи сегмента круга около его діаметра»...

Уже и теперь въ многихъ новыхъ нѣмецкихъ и французскихъ учебникахъ по геометріи убраны громоздкія и схоластическія теоремы объ объемахъ пирамидъ, тѣлъ вращенія и т. д. Вмѣсто нихъ включены въ геометрію методъ истощенія или законъ Каваліери. Такъ напр., въ новомъ учебникѣ геометріи Бореля—Штеккеля теоремы объ объемахъ пирамидъ изложены методомъ истощенія. На русскомъ языкѣ, въ элементарномъ курсѣ геометріи Д. В. Ройтмана измѣренія объемовъ нѣкоторыхъ тѣлъ проходятся при помощи закона Каваліери. Въ самомъ дѣлѣ «законъ Каваліери», обогатившій математику и начинающій собою новую эпоху величайшихъ открытій, сдѣланныхъ въ новѣйшее время, также удобный для опредѣленія площадей и объемовъ тѣлъ. Онъ замѣнялъ собою въ теченіи 50-ти лѣтъ съ большимъ успѣхомъ ин-

тегральное исчисленіе и поэтому тоже можетъ въ курсѣ геометріи сослужить роль пропедевтики для интегральнаго исчисленія.

Стало быть, съ педагогической точки зрѣнія не будетъ никакой ошибки, если въ самомъ началѣ не давать точнаго опредѣленія интеграла. Я придерживаюсь того взгляда, что сначала надо опредѣлять интегралъ, какъ площадь, и лишь когда учащіеся познакомятся съ нимъ побольше, надо дать болѣе точное опредѣленіе. На основаніи своей практики позволю себѣ сообщить вамъ, какъ я подхожу къ опредѣленному интегралу.

Сначала ученики чертятъ прямоугольникъ съ основаніемъ (a—b) на оси X и высотой c на оси $У$. Разбивая этотъ прямоугольникъ на большое число прямоугольниковъ съ основаніемъ δx и высотой c мы получаемъ, что площадь его выражается слѣдующей формулой:

$$\sum_{b}^{a} c\,\delta x = c\sum_{b}^{a}\delta x = c\,x\Big|_{b}^{a} = c\,a - c\,b.$$

2) Послѣ прямоугольника переходимъ къ площади трапеціи. Чертимъ прямую $y = mx$ и послѣ нѣкоторыхъ суммированій и нетрудныхъ преобразованій получаемъ формулу для площади трапеціи:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} m\,x\,\delta x = lim\;\; m\sum_{b}^{a} x\,\delta x = m\frac{x^2}{2}\Big|_{b}^{a} = \frac{a\,y_1}{2} - \frac{b\,y_2}{2}.$$

3) Графически изображая уравненіе параболы $y = x^2$, мы опредѣляемъ ея площадь при помощи суммы квадратовъ чиселъ натуральнаго ряда и находимъ:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} y\,\delta x = lim\sum_{x=b}^{x=a} x^2\,\delta x = \frac{x^3}{3}\Big|_{b}^{a} = \frac{1}{3}a\,y_1 - \frac{1}{3}b\,y_2\ldots$$

4) Затѣмъ чертимъ кубическую параболу $y = x^3$ и, разсуждая по предыдущему, получаемъ:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} y\,\delta x = \frac{x^4}{4}\Big|_{b}^{a} = \frac{a\,y_1}{4} - \frac{b\,y_2}{4}\ldots$$

5) Подъ конецъ изображаемъ графику уравненія $y = x^4$ и при помощи суммированія находимъ, что

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} y \delta x = \frac{a^5}{5} - \frac{b^5}{5} \text{ и т. д.}$$

Обобщая всѣ эти частные случаи, мы въ концѣ концовъ получаемъ извѣстную формулу интегральнаго исчисленія:

$$\int_{x=b}^{x=a} x^n \, dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_b^a \text{ и т. д.}$$

Такимъ способомъ «отъ частнаго къ общему» и отъ «конкретнаго къ абстрактному» доходимъ и до другихъ интеграловъ $\left(\int_0^x \cos x \, dx, \int_0^x \sin x \, dx \text{ и т. д.} \right)$. А нѣсколько такихъ интеграловъ достаточно будетъ для установленія всѣхъ объемовъ и площадей элементарной геометріи.

Въ VIII классѣ я излагаю второй циклъ интегральнаго исчисленія. Но и здѣсь я считаю цѣлесообразнымъ подчеркивать все время на частныхъ примѣрахъ, задачахъ изъ естествознанія сущность задачи интегральнаго исчисленія. Стало быть, зная безконечно-малыя измѣненія одной перемѣнной величины, которыя соотвѣтствуютъ безконечно-малымъ измѣненіямъ другой (производную), найти функціональное отношеніе, которое имѣетъ мѣсто между этими двумя величинами, т. е. найти законъ, управляющій общимъ ходомъ явленія (интегралъ).

Что касается понятія о дифференціалѣ, я не могу согласиться съ авторами русскихъ учебниковъ по анализу, что дифференціалъ слѣдуетъ опредѣлять сразу послѣ производной. Помня общее дидактическое положеніе—«по одной трудности заразъ» я откладываю понятіе о дифференціалѣ до тѣхъ поръ, пока онъ намъ не понадобится. А это какъ разъ наступитъ тогда, когда мы подойдемъ къ изученію неопредѣленныхъ интеграловъ.

VI.

Такъ какъ цѣль анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ не только формальная—расширеніе кругозора нашихъ учащихся, но и матеріальная, то необходимо, чтобы учащіеся

на конкретныхъ примѣрахъ изъ естествознанія и техники усвоили и вѣрно поняли идеи, методы и нѣкоторые навыки, необходимые для изученія явленій природы и современной техники. Въ зависимости отъ этого и опредѣляется содержаніе и методика анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ.

По дифференціальному исчисленію: производныя простѣйшихъ функцій, встрѣчаемыхъ въ естествознаніи и техникѣ, maximum и minimum въ связи съ изслѣдованіемъ функцій, уравненіе касательной. По интегральному исчисленію: понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ, основныя формулы интегрированія $\left(\int x^n\,dx,\ \int \sin x\,dx,\ \int \cos x\,dx,\ \int e^x\,dx,\ \int \frac{dx}{x},\ \int \frac{dx}{\cos^2 x},\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} \ldots\right)$, понятіе о дифференціалѣ функціи и неопредѣленномъ интегралѣ, простѣйшіе пріемы интегрированія. Подъ конецъ — понятіе о дифференціальномъ уравненіи — какъ высшее обобщеніе въ анализѣ функцій одного независимаго перемѣннаго. Дифференціальныя уравненія даютъ вѣрное представленіе «о необъятной приложимости основныхъ построеній анализа безконечно-малыхъ, составляющаго, безъ сомнѣнія, самую возвышенную изъ абстракцій, до которыхъ когда-либо поднималась мысль человѣка» (О. Контъ).

Относительно методики анализа могу сказать, что я въ своей практикѣ не останавливался детально ни на теоріи предѣловъ, ни на непрерывности функцій. Я добивался отчетливыхъ понятій у учащихся, а механическая часть, относящаяся къ дифференцированію и интегрированію, имѣла у меня второстепенное значеніе. Строгихъ аналитическихъ доказательствъ я избѣгалъ и ихъ замѣнялъ графическими иллюстраціями.

Съ такимъ небольшимъ содержаніемъ курса анализа безконечно-малыхъ можно рѣшать массу трудныхъ и важныхъ задачъ какъ въ научномъ, такъ и въ практическомъ отношеніи. Интересъ, возбуждаемый въ ученикахъ этими задачами, отражается и на ихъ успѣшности по другимъ отдѣламъ математики.

VII.

Откуда взять время для анализа безконечно-малыхъ, если мы не желаемъ непедагогичной и чрезмѣрной перегрузки общаго школьнаго курса математики новыми требованіями?

Изученіе необходимыхъ вопросовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія не потребуетъ увеличенія числа уроковъ по математикѣ. «Когда мы освободимъ начала ариѳметики, алгебры и геометріи отъ множества чужеядныхъ предложеній и ограничимся передачей руководящихъ идей и существенныхъ методовъ, мы не только сбережемъ цѣнное время, но достигнемъ еще большой ясности въ пониманіи идей. А это позволитъ ввести начала аналитической геометріи и исчисленія безконечно-малыхъ» (Ш. Лезанъ) К. М. Щербина въ своей книгѣ «Математика въ русской средней школѣ» дѣлаетъ слѣдующій выводъ на основаніи обзора трудовъ и мнѣній по вопросу объ улучшеніи программъ математики въ средней школѣ за послѣдніе девять лѣтъ (1899—1907): «чтобы представилась возможность оживить... курсъ средней школы безъ обремененія ея, необходимо сократить и упростить учебный матеріалъ нынѣ дѣйствующихъ программъ. Это слѣдуетъ сдѣлать не только съ цѣлью изыскать время для ознакомленія съ болѣе существенными вопросами (т. н. высшей математики), но и для того, чтобы курсъ освободить отъ всего, что не является особенно необходимымъ и что не заключаетъ въ себѣ общеобразовательнаго элемента. Съ этой цѣлью изъ курса нужно опустить тѣ статьи, которыя отмѣчены нами при обзорѣ программъ»... По моему мнѣнію изъ курса ариѳметики надо исключить слишкомъ сложныя задачи на сложное тройное правило, правило учета векселей, задачи на правило смѣшенія, такъ наз., второго рода, пропорцій и т. п. Изъ курса алгебры слѣдуетъ исключить слишкомъ искусственные многочлены, дроби и радикалы, неопредѣленныя уравненія, возвратныя уравненія, уравненія показательныя, непрерывныя дроби, теорію соединеній и «биномъ Ньютона». Также можно сократить и упростить курсы геометріи и тригонометріи. Такимъ образомъ о непедагогичной и чрезмѣрной перегрузкѣ школьнаго курса математики и рѣчи быть не можетъ.

Что же касается до программъ по математикѣ мужскихъ и женскихъ гимназій, то онѣ столь же стары, какъ старо то далекое время, когда они впервые были введены въ школьную жизнь, да такъ и пребываютъ въ школѣ до нашихъ дней. Въ самомъ дѣлѣ, до сихъ поръ преподаватели гимназій должны

руководствоваться планами, программами и объяснительною запискою, утвержденными въ 1890 г. и представляющими лишь незначительное видоизмѣненіе программъ 1872 г.!

Сознавая потребность въ реформѣ школьнаго курса математики, Кіевское Физико-Математическое общество еще въ 1906—7учебномъ году обсуждало и вырабатывало проектъ желательнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій. По этому проекту съ IV класса развивается понятіе о функціональной зависимости. Въ программу VII кл. вошли понятія о производной и объ интегралѣ, а въ VIII классѣ элементы аналитической геометріи. Но за то изъ нынѣ дѣйствующихъ программъ исключены нѣкоторые отдѣлы, не имѣющіе самостоятельной цѣнности, и кромѣ того, приводящіе къ утомительнымъ передѣлкамъ.

Въ 1908 году Варшавскій кружокъ преподавателей физики и математики, вырабатывавшій проектъ учебнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій, высказался за введеніе анализа б.-м. въ среднюю школу. «Преподаваніе анализа безконечно-малыхъ должно итти въ тѣсной связи съ преподаваніемъ, какъ математики, такъ и прикладныхъ наукъ. Съ этою цѣлью первоначальное понятіе о производной и интегралѣ должно быть дано учащимся возможно ранѣе, не позже начала VII класса»...

Математическій отдѣлъ учебно-воспитательнаго Комитета при СПБ. Педагогическомъ музеѣ военно-учебныхъ заведеній, разрабатывавшій въ теченіе послѣднихъ (1908—11 г.) лѣтъ разные вопросы, касающіеся обученія математикѣ, также призналъ необходимымъ включить въ курсъ средней школы элементы анализа безконечно-малыхъ.

Подъ конецъ и оффиціальныя программы дѣлаютъ уступку времени. Для реальныхъ училищъ введены новыя программы, болѣе отвѣчающія запросамъ жизни и содержащія начало дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и элементы аналитической геометріи. Для кадетскихъ корпусовъ 17 Іюня 1911 г. утверждена программа по математикѣ на новыхъ началахъ. По этой программѣ цѣль математикѣ заключается между прочимъ и въ развитіи функціональнаго мышленія. Начала аналитической геометріи и основанія анализа безконечно-малыхъ вошли въ программу VII класса.

Гимназіи и среднія школы различныхъ типовъ все ждутъ того времени, когда новая струя живой науки вольется въ нашу устарѣлую программу. Но частная инціатива и здѣсь разрабатываетъ новые планы. Такъ, напр. ,математическая комиссія при Преображенской Новой Школѣ (восьмиклассная женская гимназія, въ младшихъ классахъ совмѣстное обученіе) выработала программу по математикѣ съ реформаторскими тенденціями, по которой и преподается математика уже 4-й годъ. Я имѣю честь въ этой школѣ третій годъ проводить курсъ по анализу б.-м. въ VII и VIII классахъ. Благодаря этой практикѣ я и пришелъ къ тѣмъ положеніямъ, о которыхъ я имѣлъ честь сейчасъ вамъ докладывамть.

Я надѣюсь, что Съѣздъ выскажется точно, опредѣленно и въ положительномъ смыслѣ въ пользу введенія началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій съ элементами аналитической геометріи въ общеобразовательный курсъ средней школы. И послѣ такого компетентнаго и авторитетнаго голоса я глубоко увѣренъ, что мы отъ единичныхъ усилій перейдемъ къ коллективному труду. Передъ всѣми нами—педагогами математики стоитъ общее дѣло, успѣхъ котораго требуетъ совмѣстныхъ усилій, обмѣна мнѣній, взаимной критики и провѣрки нашихъ опытовъ.

Конспектъ.

I. Необходимость введенія анализа безконечно-малыхъ—началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій—въ среднюю школу вытекаетъ:

a) изъ тенденціи сближенія науки со школой,

b) изъ запросовъ жизни,

c) изъ соображеній общепедагогическаго характера.

II. Ввести начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій въ среднюю школу нужно не въ видѣ «надстройки» надъ, т. наз., школьнымъ курсомъ элементарной математики, а въ связи съ понятіемъ о функціи, проходящимъ красной нитью черезъ всю программу математики. Въ виду этого, весь курсъ математики въ средней школѣ долженъ быть сконцентрированъ около идеи функціальной зависимости и расширенъ первоначальными понятіями анализа безконечно-малыхъ.

III. Методическое распредѣленіе матеріала анализа б.-м. должно согласоваться съ общимъ дидактическимъ правиломъ: прежде всего—сущность дѣла и наглядное представленіе (графика), затѣмъ—идеи и понятія, а подъ конецъ—терминъ и символъ. Необходимо и здѣсь, для анализа б.-м., установить два концентра (VII и VIII кл.).

IV. Ученіе о производной разрабатывается съ трехъ точекъ зрѣнія: физической, геометрической и математической (обобщающей), въ связи съ разнообразными примѣрами изъ механики, физики, химіи и т. п. Общее методическое положеніе цѣлесообразно и здѣсь, при прохожденіи ученія о производной: «сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило».

V. Что касается интегральнаго исчисленія, то въ первое время слѣдуетъ опредѣлять интегралъ, какъ площадь, и лишь когда учащіеся познакомятся съ нимъ побольше, надо дать болѣе точное опредѣленіе. Въ виду этого, въ систематическомъ курсѣ геометріи, законъ Кавалієри и его приложенія къ вычисленію площадей плоскихъ фигуръ и объемовъ тѣлъ должны подготовить почву для интегральнаго исчисленія. Первые элементы интегральнаго исчисленія въ ихъ историческомъ развитіи вносятъ тоже и историческій элементъ въ преподаваніи математики.

Понятіе о дифференціалѣ надо давать только при прохожденіи неопредѣленныхъ интеграловъ.

VI. Такъ какъ цѣль анализа б.-м. въ средней школѣ не только формальная—расширеніе кругозора нашихъ учащихся, но и матеріальная, то необходимо, чтобы учащіеся на конкретныхъ примѣрахъ изъ естествознанія и техники усвоили и вѣрно поняли идеи, методы и нѣкоторые навыки, необходимые для изученія явленій природы и современной техники. Въ зависимости отъ этого и опредѣляется содержаніе курса анализа б.-м. въ средней школѣ. По дифференціальному исчисленію производныя функцій, встрѣчаемыхъ въ естествознаніи и техникѣ, а по интегральному исчисленію: $\int x^n\,dx$; $\int \sin x\,dx$; $\int \cos x\,dx$; $\int \frac{dx}{x}$ и $\int e^x\,dx$.

VII. Заключеніе. Откуда взять время для анализа б.-м.? Исключеніе устарѣлыхъ отдѣловъ: неопред. ур-ія, не-

прерывныя дроби, теорія соединеній, биномъ Ньютона. Программы по анализу б.-м. реальн. уч., кадетскихъ корпусовъ, Кіевскаго и Варш. кружковъ, Преображенской школы etc.- Резюме.

Пренія по докладамъ М. Г. Попруженко и Ф. В. Филипповича.

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.). «Въ докладѣ г. Попруженко былъ высказанъ цѣлый рядъ чрезвычайно цѣнныхъ замѣчаній въ чрезвычайно доступной формѣ, но съ однимъ изъ его заключеній придется рѣзко несогласиться. Конечно, если отъ преподаванія высшей математики желать только, чтобы ученикъ рисовалъ графики, или кое - что узналъ изъ курса высшей математики, то это легко исполнимо и можно сказать, что мы стали на твердую дорогу и вѣрнымъ шагомъ идемъ впередъ. Несчастье нашей высшей математики было въ томъ, что за нее принялся ограниченный кругъ лицъ, которыя и намѣтили программу, на мой взглядъ, чрезвычайно опаснымъ путемъ: безъ съѣздовъ, безъ широкаго обсужденія былъ изданъ указъ обучить учениковъ *все дифференцировать и кое что интегрировать* и т. д. Въ своей положительной творческой части программа содержала ровно столько, сколько можетъ дать бѣглая размѣтка курса лекцій рукою студента 2-го курса; но кромѣ этой положительной части была оригинальная часть, именно—чрезвычайно широкое развитіе ученія о предѣлахъ и рѣшеніе связанныхъ съ ними вопросовъ. Господа, оригиналенъ былъ бы совѣтъ попросить сначала выстругать всѣ доски перочиннымъ ножемъ, а потомъ озаботиться пріобрѣтеніемъ рубанка, также оригиналенъ совѣтъ—всѣ сложные вопросы объ объемахъ, о поверхностяхъ рѣшать элементарнымъ методомъ съ большимъ трудомъ и только потомъ приступить къ анализу безконечно-малыхъ, поговорить объ интегрированіи и его не использовать. Русскому педагогическому міру досталось тяжелое наслѣдіе, состоящее въ томъ, что ученику показанъ путь къ недоступнымъ университетскимъ идеямъ, которыя мы можемъ обрисовать очень приблизительно, и въ его распоряженіи оставленъ огромный запасъ неиспользованныхъ формулъ. Исторія введенія безконечно-малыхъ въ математическую науку была совершенно иная. Не сухое созерцаніе формулъ предлагалъ Ньютонъ, а возбуждалъ интересъ къ вопросу о безконечно-малыхъ, разрѣшая серьезнѣйшіе вопросы математики и прикладной науки ея—механики. Если мы посмотримъ на пропедевтическіе курсы заграницей, то не этотъ методъ, который выбрали у насъ въ средней

школѣ, намѣчается какъ лучшій способъ ознакомить съ пріемами анализа".

„Въ ученикахъ нашихъ замѣтны признаки разочарованія въ математикѣ. Огромную потенціальную энергію скопило общество въ формѣ полубезсознательнаго преклоненія передъ идеаломъ этой великой науки. Огромныя средства внушенія использовали корифеи математики для той же цѣли. А мы, предлагая по оффиціальной указкѣ молодому поколѣнію науку въ одностороннемъ схоластическомъ освѣщеніи, рискуемъ разрушить плоды ихъ вѣковыхъ усилій, поселивъ въ умахъ подрастающаго поколѣнія превратныя понятія о высшей математикѣ".

„Я думаю, что г.-л. Попруженко вѣрно намѣтилъ тотъ путь, которымъ лучше итти: сначала какъ можно меньше фактовъ и какъ можно больше идей. Для того, чтобы ввести учащихся въ пониманіе метода нѣтъ надобности обращаться къ труднымъ случаямъ интегрированія и дифференцированія — достаточно имѣть дѣло только съ цѣлыми функціями. Конечно, учащіеся не будутъ въ состояніи пользоваться этимъ методомъ тамъ, гдѣ придется имѣть дѣло съ синусами и косинусами, съ функціей e^x и т. д., но можно сдѣлать такъ, чтобы они прониклись убѣжденіемъ, что имъ показанъ уголокъ великой науки, т. е. можно поставить дѣло обученія анализу на тотъ путь внушенія имъ величія математики, на которомъ стояли величайшіе ея представители, оставившіе намъ въ наслѣдіе глубокое къ ней уваженіе. Я думаю, что мы сдѣлаемъ хорошо, если будемъ считать, что мы никакого великаго дѣла не дѣлаемъ, вводя анализъ: мы сдѣлали опытъ, и къ этому опыту нужно относиться съ чрезвычайно большимъ вниманіемъ и посмотрѣть, вноситъ-ли онъ что-нибудь дѣйствительно или составляетъ потерю времени, и путемъ всестороннихъ поисковъ отыскать новые пути. Для этого нужно прежде всего дать преподавателямъ извѣстную свободу, стѣснивъ ихъ самыми малыми рамками. Можно дать возможность преподавателямъ идти нѣсколькими путями, эти пути нужно изслѣдовать, но во всякомъ случаѣ становиться на тѣ рельсы, на которыя мы стали, и думать, что сдѣлали что-нибудь великое, по моему преждевременно".

А. В. Полторацкій (Спб). „Намъ сообщена попытка введенія анализа, но меня одно поразило, что я не слышалъ, что такія попытки дѣлались въ англо-саксонскихъ странахъ и Скандинавіи. Тутъ больше, чѣмъ гдѣ-либо въ среднихъ школахъ учатся для жизни, а не только для того, чтобы учиться; наукой ради науки занимаются только въ университетахъ".

„Относительно перемѣнъ программъ въ Швеціи существуетъ система, которая къ сожалѣнію у насъ не примѣняется. Тамъ программа

является не опытомъ, а результатомъ уже произведенныхъ опытовъ. Тамъ существуетъ спеціальное заведеніе, новая элементарная 9-классная школа въ Стокгольмѣ, гдѣ примѣняются всѣ новые методы. Преподаватели—новаторы приглашаются туда, имъ дается курсъ, который они проводятъ 3 года подъ наблюденіемъ коллегіи спеціалистовъ, и параллельно такой же курсъ ведутъ другіе преподаватели; полученные результаты обсуждаются и въ концѣ-концовъ вводится или новый предметъ, или новая программа. У насъ же въ реальныхъ училищахъ и кадетскихъ корпусахъ анализъ преподается уже нѣсколько лѣтъ, но оказывается, что послѣ нѣсколькихъ лѣтъ опыта нѣтъ даже учебника, который можно было бы рекомендовать цѣликомъ, нѣтъ подготовленныхъ преподавателей, методика предмета разбросана по отдѣльнымъ статьямъ журналовъ. О результатахъ опытовъ одни говорятъ, что въ нѣкоторыхъ заведеніяхъ хорошо преподается, другіе—что удовлетворительно, третьи—что неудовлетворительно, и при этомъ всѣми упускается изъ виду одно: какъ эти успѣхи отражаются на успѣхахъ по другимъ предметамъ. Въ нашихъ заведеніяхъ математика почти поглощаетъ все время, между тѣмъ времени этого немного. Въ одномъ кадетскомъ корпусѣ производились интересныя вычисленія, сколько у кадета остается въ сутки свободнаго времени. Оказалось, что у 20% свободнаго времени 5 мин. въ сутки, причемъ они обязаны это время заниматься внѣкласснымъ чтеніемъ по русскому и иностраннымъ языкамъ. Поэтому при введеніи высшей математики упускать изъ виду успѣхи по другимъ наукамъ рисковано. У насъ производится очень обширный опытъ одновременно въ массѣ заведеній. Опытъ несомнѣнно будетъ очень дорогой, особенно въ смыслѣ затраты времени. Между тѣмъ судить объ этомъ опытѣ будетъ чрезвычайно трудно, потому что онъ будетъ производиться въ совершенно несоизмѣримыхъ условіяхъ: разные курсы, разные преподаватели и т. д.“

„Наконецъ, нельзя себѣ представить, чтобы одна комиссія могла одновременно оцѣнить эти результаты. Придется довольствоваться письменными отчетами, которымъ придется вѣрить на слово. Между прочимъ указывалось, что для полнаго успѣха этого новаго предмета нужно начинать его не съ 7 класса, а съ 5“.

„А другой докладчикъ (Ф. В. Филипповичъ) находитъ, что этого мало для того, чтобы курсъ высшаго анализа соотвѣтствовалъ своему назначенію: должно проходить его во всѣхъ классахъ, нужно перестроить весь курсъ математики. Можетъ быть, этотъ дорогой опытъ дастъ результаты благіе, но пока это говорить рано. Въ настоящее же время мы не видимъ передъ собой великаго культурнаго завоеванія, а одно изъ благихъ намѣреній, которыми вымощена дорога въ адъ“.

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб.). „Адъ уже перестали мостить благими намѣреніями: ихъ ужъ больно много. Дѣло не въ этомъ, а въ томъ, нужно ли пріобщить среднюю школу къ интересамъ науки и культуры. Я не могу согласиться съ мнѣніемъ моего уважаемаго предшественника и, наоборотъ, вполнѣ согласенъ съ М. Г. Попруженко и Ф. В. Филипповичемъ. Если я взялъ слово, то для нѣкоторыхъ дополненій.

1) Не нужно отдѣлять элементарный курсъ исчисленія безконечно малыхъ отъ другихъ отдѣловъ математики.

Учениками могутъ быть исчислены производныя такихъ алгебраическихъ функцій, какъ x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ въ свое время, напр., при прохожденіи дѣлимости разности $x^n - a^n$ на разность $x - a$ при натуральномъ значеніи буквы n; въ геометріи — дифференціалъ квадрата, сторона котораго обозначена буквой x, какъ $2x \cdot dx$, и т. п.; въ тригонометріи—при изученіи отношенія $\frac{\sin h}{h}$, стремящемся къ единицѣ съ приближеніемъ значеній буквы h къ нулю, и т. п.

2) Только систематизацію понятій о производной, дифференціалѣ, интегралѣ алгебраической функціи надо отнести непремѣнно къ курсу одного изъ высшихъ классовъ; это тѣмъ важнѣе, что исключительно интуитивныя точки зрѣнія не всегда цѣлесообразны для учащихся высшихъ классовъ.

3) Въ занимающей насъ составной части курса тоже необходимо соблюдать принципъ такъ называемаго „переплетенія“, „вклиненія“, „фузіонизма“, который требуетъ соблюденія хотя логически вѣрныхъ, но методически вредныхъ перегородокъ между различными отдѣлами; педагогически полезны сближенія между однимъ и тѣмъ же въ логическомъ отношеніи матеріаломъ, имѣющимся въ разныхъ отдѣлахъ элементарнаго курса математики.

4) Начатки дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія гораздо легче цѣлой массы вопросовъ не только алгебры, геометріи и ученія о тригонометрическихъ числахъ, но даже ученій такъ называемой теоретической ариѳметики.

5) Но введеніе курса, подобнаго предлагаемымъ съ разныхъ сторонъ, возможно только по исключеніи изъ курса элементарной математики всего того, что не необходимо, а такого матеріала много и въ ариѳметикѣ, и въ алгебрѣ, и въ геометріи“.

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Когда я кончалъ университетъ, то у меня ни на минуту не возникало даже мысли, что курсъ анализа безконечно-малыхъ величинъ можетъ настолько „опошлиться“, чтобы снизойти до средней школы. Когда я говорилъ со своими профессорами о томъ, какая существуетъ разница между элементарной и высшей математикой, то профессора мнѣ отвѣчали:

„Въ элементарной математикѣ разсматриваются независимыя *постоянныя* величины, а въ высшей математикѣ—независимыя *перемѣнныя*; тамъ разсматриваются все время числа неизвѣстныя *немѣняющіяся*, а тутъ предметомъ изученія все время являются неизвѣстныя *мѣняющіяся*". Затѣмъ, когда я пріобщился къ той точкѣ зрѣнія, которая радикально переворачиваетъ всю школьную математику, мнѣ пришлось, конечно, прежде всего самому научиться какъ вообще математикѣ, такъ и тѣмъ немногимъ существующимъ точкамъ зрѣнія методики на постановку преподаванія высшей математики. Прежде всего, пришлось „открывать америки", что неизбѣжно случается съ каждымъ изъ насъ вслѣдствіе того, что мы всѣ не получаемъ спеціальной педагогической подготовки. Я не буду сейчасъ касаться этого вопроса. Намъ придется къ нему еще вернуться въ связи съ докладомъ профессора Кагана о подготовкѣ преподавателей. Но я долженъ сказать, что если въ настоящее время мы не имѣемъ хорошихъ учебниковъ и хорошихъ преподавателей курса анализа безконечно-малыхъ величинъ въ средней школѣ, то этимъ мы главнымъ образомъ обязаны тому, что въ этой области мы сами слишкомъ мало знаемъ. Какъ насъ учили, такъ и мы въ большинствѣ случаевъ учимъ нашихъ учениковъ. А что такое оффиціальная программа? Взяли университетскую программу, посредствомъ хорошаго прибора ее уменьшили и въ такомъ укороченномъ видѣ перенесли въ среднюю школу. Конечно, это плодъ оффиціальнаго творчества, но, какъ совершенно правильно сказалъ А. Н. Шапошниковъ, оффиціальное творчество для насъ не обязательно. Заграницей уже раздаются голоса въ защиту того взгляда, который говоритъ, что не нужно дѣлать надстроекъ надъ пятымъ и шестымъ годами стараго курса, не нужно копаться въ верхушкахъ этого курса, а нужно разъ навсегда радикально измѣнить математическое образованіе. Профессоръ Тезаръ въ 1909 году на австрійскомъ съѣздѣ высказалъ слѣдующее: „Разъ навсегда надо покончить съ системой, существующей отъ Гомера до нашихъ дней, пусть она остается въ музеяхъ исторіи, начнемъ изученіе съ настоящаго времени". А вотъ тотъ лозунгъ, который провозглашенъ въ Германіи теперь: химическое преобразованіе, смѣшеніе всѣхъ элементовъ средне-школьной математики. Этотъ лозунгъ долженъ быть поставленъ во главу будущаго строительства школы. Что касается раздѣленія математики на элементарную и высшую, то тотъ, кто это утверждаетъ, не знакомъ съ завоеваніями послѣднихъ десятилѣтій. Кромѣ того прибавлю, что вопросы элементарной математики оказались гораздо сложнѣе и гораздо недоступнѣе курса анализа безконечно-малыхъ величинъ. Школа, несомнѣнно, не должна отставать отъ общаго научнаго

развитія. Это азбучная истина. Но школа должна также считаться съ особенностями учащихся. Поэтому мы должны принять къ свѣдѣнію положеніе, которое написано на обложкѣ одной старой книги Д'Алямбера: „Allez en avant, la foi vous viendra!“—ступайте впередъ, а вѣра придетъ послѣ. Это изреченіе нужно примѣнять въ школѣ къ изученію математики, ибо оно служило руководящимъ началомъ для науки. Первые разрабатывавшіе анализъ безконечно-малыхъ величинъ часто не заботились о строгости всѣхъ доказательствъ. Очевидно, стремленіе докопаться до аксіомъ возникло въ то время, когда созидательная работа по анализу безконечно-малыхъ величинъ была закончена. Въ заключеніе я приведу только-что процитированныя слова: „Allez en avant, la foi vous viendra“! Нужно сначала идти впередъ, а вѣра придетъ со всѣми богатыми приложеніями анализа“.

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Когда возбуждался вопросъ о созывѣ перваго всероссійскаго съѣзда математиковъ, то мнѣ казалось, что вопросъ, разбираемый нами сегодня, явится однимъ изъ самыхъ существенныхъ, однимъ изъ самыхъ важныхъ и въ то-же время найдетъ наибольшій откликъ въ средѣ преподавателей, которые выступятъ на защиту его отъ могущихъ быть враговъ, какъ оффиціальныхъ, такъ и неоффиціальныхъ. Сегодняшніе доклады, видимо, выслушаны были съ большимъ интересомъ, но, къ сожалѣнію, на пренія осталось весьма незначительное число членовъ, и я лично опасаюсь, что какъ бы этотъ вопросъ такъ и не остался бы невыясненнымъ. Каково же отношеніе членовъ съѣзда къ вопросу о введеніи анализа безконечно-малыхъ въ курсъ средней школы? Я записался заранѣе съ тѣмъ, чтобы съ противниками введенія анализа въ среднюю школу, если бы такіе нашлись, сойтись грудь съ грудью. Но, въ сущности, противниковъ не оказалось. А. Н. Шапошниковъ началъ говорить какъ бы противъ этого введенія, но то, чѣмъ онъ закончилъ свою рѣчь, удовлетворило бы самаго яраго сторонника введенія анализа безконечно-малыхъ величинъ въ курсъ средней школы. Вѣдь именно въ томъ смыслѣ, какъ онъ высказался, и понимается необходимость введенія въ курсъ средней школы анализа безконечно-малыхъ величинъ. Дѣйствительно, Боже упаси отъ того, чтобы ученики умѣли только продифференцировать нѣсколько формулъ и вслѣдствіе этого, заразившись верхоглядствомъ, говорили-бы, что они знаютъ высшую математику. Что касается полковника Полторацкаго, то его возраженіе собственно свелось къ тому, что въ Швеціи и Англо-саксонскихъ странахъ анализъ безконечно-малыхъ величинъ не введенъ въ курсъ средней школы. Но мнѣ кажется, что это не доводъ. Изъ того, что въ Швеціи этого нѣтъ, отнюдь не слѣдуетъ, что этого и быть не должно. Далѣе было высказано со-

ображеніе, что у насъ нѣтъ ни хорошихъ учебниковъ, ни хорошихъ преподавателей. Но вѣдь въ такомъ случаѣ ни на одномъ новомъ вопросѣ нельзя было-бы остановиться, потому что пока не было потребности въ этомъ, пока это ясно не сознавалось ни обществомъ, ни педагогической средой, откуда же было явиться преподавателямъ? учебникамъ? методикамъ? Совершенно вѣрно: какъ-бы программы ни писались, разъ сама педагогическая среда не будетъ чувствовать желательности проведенія даннаго курса, онъ не пройдетъ никогда. Затѣмъ было указано, что математика поглощаетъ все время ученика, причемъ довольно опредѣленно намекалось на военно-учебныя заведенія. Но это настолько было голословно и бездоказательно, что я этого опровергать не берусь. Наконецъ, еще говорили, что это будетъ слишкомъ дорогой опытъ въ смыслѣ затраты времени". „Я думаю, что если введеніе анализа безконечно-малыхъ величинъ существенно и желательно, то этотъ опытъ окажется навѣрно недорогимъ. Времени онъ, конечно, потребуетъ много, но вѣдь намъ и не желательно вводить скороспѣлые опыты. Такимъ образомъ, оказалось, что у меня нѣтъ противниковъ, ибо со всѣми тѣми, которые высказывались, я вполнѣ согласенъ. Но мнѣ только кажется, что атмосфера, создавшаяся здѣсь, слишкомъ малаго напряженія по сравненію съ тѣмъ, чего заслуживаетъ данный вопросъ".

Б. А. Марковичъ (Спб.). „Господа, если то, что нѣкоторые называютъ крупнымъ завоеваніемъ, и что несомнѣнно глубоко вѣрно, по мнѣнію другихъ является лишь опытомъ, пусть это будетъ опытъ, но опытъ широкій, свободный по возможности. Я имѣю въ виду сдѣлать фактическія дополненія къ прекрасному докладу генералъ-лейтенанта М. Г. Попруженко. Цитируемая имъ превосходная книга Tannery написана *спеціально „для классиковъ"* французской средней школы, у которыхъ математическая подготовка значительно меньше, чѣмъ у французскихъ реалистовъ (Sections: c) latin—sciences и d) sciences—langues vivantes), и даже, въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ, меньше, чѣмъ у нашихъ гимназистовъ. Въ послѣднемъ классѣ классическихъ отдѣленій (Classe de philosophie — вѣнецъ секцій: a) latin - grec, b) latin - langues vivantes) книга Tannery служитъ учебникомъ или пособіемъ и составлена она прямо по оффиціальной программѣ этого класса".

„Французской реформѣ въ предстоящемъ 1912 году минетъ десятилѣтіе; программы пересматривались и дополнялись въ 1905 году; слѣдовательно, „опытъ" преподаванія „началъ анализа" въ средней школѣ, даже въ чисто классическихъ отдѣленіяхъ, есть и опытъ, давшій благопріятные результаты".

„Когда я былъ во Франціи, то я еще засталъ старое изданіе алгебры Бріо, гдѣ во второй части имѣются теорія производныхъ.

ученіе о максимумѣ, ряды -Мэкъ-Лорена и Тейлора. Насколько мнѣ помнится, у насъ съ сороковыхъ годовъ дѣлались попытки въ этомъ направленіи. Я самъ засталъ такого рода опытъ, который касался, собственно говоря, производныхъ, но онъ не принесъ никакихъ результатовъ. Затѣмъ, я хотѣлъ сказать только о боязни А. В. Полторацкаго, что опытъ этотъ будетъ очень дорогой. Я сдѣлалъ этотъ опытъ въ нѣмецкой женской гимназіи и могу сказать, что кромѣ увлеченія этимъ предметомъ, кромѣ благодарности и хорошихъ результатовъ, я ничего не видѣлъ. Поэтому я полагаю, что при введеніи этого курса въ восьмомъ классѣ, при разумномъ проведеніи программы, при раціональной постановкѣ общаго математическаго преподаванія—результаты несомнѣнно будутъ хорошіе. Но говорятъ, что у насъ нѣтъ методикъ, оффиціально одобренныхъ. Нѣтъ, такія методики существуютъ и даже въ большомъ количествѣ, напримѣръ, методика Евтушевскаго, Шохоръ-Троцкаго и др. И такъ, я думаю, что останавливаться нельзя, нужно начать производить опыты и производить ихъ возможно лучше“.

В. А. Соколовъ (Майкопъ, Куб. обл.). „Я скажу на основаніи личнаго опыта, который я вынесъ учительствуя въ захолустьѣ. У меня никакихъ учебниковъ не было. Я вытащилъ университетскій курсъ Серре, курсъ дифференціальнаго исчисленія, единственный элементарный курсъ, затѣмъ взялъ главу изъ алгебры Бертрана и такимъ образомъ самъ составилъ курсъ. Оффиціальная программа, конечно, не удовлетворительна, но вѣдь она не связываетъ насъ. Почему я могу отступить отъ нее, а другой не можетъ? Я не выпустилъ изъ оффиціальной программы ни одного пункта. Я только измѣнилъ распредѣленіе матеріала. Одинъ годъ я началъ неудачно именно съ того самаго введенія, которое здѣсь было такъ справедливо раскритиковано, дѣйствительно оно нѣсколько громоздко. Я прошелъ его полностью, такъ что только во второй четверти могъ приступить къ выясненію понятія о производныхъ, но, несмотря на это, въ концѣ года я могъ при помощи интегральнаго исчисленія вычислить объемъ произвольнаго цилиндра, объемъ конусовъ съ какимъ угодно основаніемъ, объемъ шара и объемъ тѣлъ вращенія. По словамъ учениковъ, эти вычисленія помогли имъ составить понятіе о значеніи этого курса“. „Здѣсь говорилось о томъ, что анализъ безконечно-малыхъ потребуетъ много времени у учениковъ. Конечно, но во всякомъ случаѣ въ этотъ годъ процентъ окончившихъ курсъ и получившихъ аттестатъ зрѣлости выразился въ цифрѣ 100. Такимъ образомъ эта лишняя работа, этотъ опытъ вовсе не такъ опасенъ. Успѣха я достигъ постепенностью въ введеніи новыхъ понятій и новыхъ методовъ. Прежде всего, въ первомъ полугодіи я имѣлъ дѣло только съ производ-

ными. Въ настоящемъ году, напримѣръ, я прошелъ производныя, цѣлыя раціональныя функціи. Прошелъ все это на примѣрахъ. Примѣнялъ построеніе графиковъ, прошелъ приложеніе графиковъ, уравненіе касательной. Затѣмъ мы рѣшали задачи, затѣмъ разсмотрѣли измѣненіе функцій, разсмотрѣли теорему Ролля на основаніи интегрированія, разсмотрѣли кривыя, направленіе касательной и по виду кривыхъ опредѣляли направленіе касательной. Долженъ сказать, что только эта теорема была принята на основаніи интуиціи, остальное все было доказано вполнѣ обоснованно. Затѣмъ прошли о максимумѣ, минимумѣ, дѣлали задачки на разложеніе, которыя вовсе не являются такими пустыми. Для примѣра приведу слѣдующее: дано уравненіе прямой, дана точка съ координатами, надо на прямой назвать точку, которая лежала-бы ближе всѣхъ къ данной точкѣ. Говорятъ, надо найти производную корня. Это неизвѣстное пришлось подсказать, а именно, что можетъ быть можно было-бы найти квадратъ. Стали искать квадратъ, и задача рѣшена. Задача несомнѣнно имѣетъ интересъ, ибо показываетъ примѣненіе новаго метода, показываетъ разницу между старымъ и новымъ методами. Прежде, когда ученики получали линію, они составляли уравненіе, получался перпендикуляръ. Но это совершенно невѣрный методъ. Теперь всѣ затрудненія устранены. Я думаю, что весь курсъ я несомнѣнно успѣю закончить во второмъ полугодіи". „Что касается до анализа безконечно-малыхъ величинъ, то я, напримѣръ, проходилъ такую теорему если сумма конечна и всѣ слагаемыя положительны, то, если эти слагаемыя помножить на число, имѣющее предѣломъ единицу, то сумма измѣнится на величину безконечно малую. Затѣмъ, говоря о линіи окружности, я внесъ измѣненія по сравненію съ учебникомъ. Я сказалъ, что предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго многоугольника, не зависитъ ни отъ вида многоугольника, ни отъ его свойствъ. Тоже доказывалъ и относительно пирамиды. При этомъ долженъ сказать, что весь курсъ я велъ лекціоннымъ способомъ, за исключеніемъ нѣкоторыхъ теоремъ о безконечно-малыхъ величинахъ относительно окружности. Ученики принимали активное участіе въ этой работѣ—они всѣ продѣлывали сами на задачахъ. Собственно и дифференціальное исчисленіе пройдено было все на задачахъ. Это несомнѣнно—выполнимо Замѣчу кстати, что въ настоящемъ учебномъ году классъ у меня не изъ сильныхъ, и если онъ справится съ этимъ матеріаломъ, то навѣрно всякій другой классъ справится. Польза же отъ такихъ занятій несомнѣнно будетъ".

К. И. Зренс (Спб.). „Здѣсь всѣ говорили объ этомъ вопросѣ съ точки зрѣнія научнаго развитія и никто не подошелъ къ нему съ практической точки зрѣнія. Большинство изъ насъ, окончившихъ

высшее учебное заведеніе, несомнѣнно испытывало на себѣ то непріятное ощущеніе, которое приходится переживать при переходѣ изъ средней школы въ высшую. Въ теченіи почти цѣлаго года, если не больше, большинство изъ насъ, слушая дифференціальное и интегральное исчисленія въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, выходили изъ аудиторіи какъ бы въ чаду. Обыкновенно никакого впечатлѣнія отъ такихъ лекцій не получалось. Съ первой же лекціи преподаватели говорятъ: «забудьте все то, чему васъ учили въ гимназіи, учитесь снова». Такое привѣтствіе несомнѣнно имѣетъ свои результаты. По прошествіи перваго года большинство изъ насъ или окончательно покидало учебное заведеніе, или оставалось на второй годъ и потомъ снова держало конкурсные экзамены. Слѣдовательно, въ настоящее время, если будутъ введены дифференціальное и интегральное исчисленія, то получится польза не только моральная, но и чисто практическая, и въ молодыхъ людяхъ, оканчивающихъ среднее учебное заведеніе, будетъ поддерживаться вѣра въ то, что ученіе въ средней школѣ не было для нихъ безполезной тратой времени и такимъ образомъ будетъ развиваться въ юношахъ любовь къ математической наукѣ".

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я очень благодаренъ за докладъ Ф. В. Филипповича, который я услышалъ. Онъ въ высшей степени обоснованъ и мотивированъ. Но я долженъ сказать, что реформы преподаванія математики отразятся на всемъ учебномъ планѣ. Я мечталъ давно о введеніи курса безконечно-малыхъ въ среднюю школу и, дождавшись, наконецъ, этого времени, на практикѣ убѣдился, что программа по анализу безконечно-малыхъ очень трудна для VII класса. Масса учениковъ изъ за анализа безконечно-малыхъ оказалась неуспѣвающей. Чѣмъ можно объяснить этотъ фактъ? Я думаю, что отчасти виновата оффиціальная программа: трудно насадить казеннымъ путемъ какой бы то ни было новый учебный предметъ. Далѣе, виноваты и русскіе учебники по анализу безконечно-малыхъ для средней школы, которые отличаются иногда математическимъ и педагогическимъ невѣжествомъ. Составители сами часто плохо понимаютъ то, о чемъ пишутъ, у нихъ часто нѣтъ математическаго образа мышленія. Наконецъ, въ большинствѣ случаевъ, по крайней мѣрѣ 90%, какъ это ни печально признавать, виноваты сами преподаватели. Поэтому, привѣтствуя введеніе преподаванія началъ анализа въ среднюю школу, я считаю, что Съѣздъ оказалъ бы этому введенію большую услугу, если бы вынесъ, слѣдующую резолюцію: введеніе анализа обязательно связать съ общей реформой преподаванія математики и сдѣлать этотъ предметъ для учащихся необязательнымъ. Я увѣренъ, что если бы мы сдѣлали опросъ учениковъ относительно

преподаванія высшей математики, то у хорошихъ учителей число желающихъ заниматься было бы велико и непрерывно бы росло, а у плохихъ уменьшилось бы или даже вовсе свелось бы къ нулю".

М. Г. Попруженко. (Спб.). „Я скажу два слова по поводу того, что англо-саксонскія школы совершенно чужды дѣлу введенія анализа въ средней школѣ. Долженъ сказать, что я недостаточно освѣдомленъ о томъ, какъ рѣшается этотъ вопросъ въ англійскихъ школахъ, но тенденція къ популяризаціи и даже вульгаризаціи основъ анализа безконечно-малыхъ величинъ въ Англіи несомнѣнно существуетъ и имѣетъ тамъ такихъ видныхъ представителей, какъ Перри и Лоджъ. Что же касается до замѣчанія о томъ, что у насъ никто не готовъ къ преподаванію анализа безконечно-малыхъ величинъ, то я съ этимъ рѣшительно не могу согласиться. Говорятъ, что учебниковъ нѣтъ, но это невѣрно, учебники есть. Быть можетъ—нѣтъ идеальныхъ учебниковъ, но порядочные несомнѣнно существуютъ. Затѣмъ—я не говорилъ, что учителя не готовы. Я сказалъ, что господамъ преподавателямъ придется подготовиться, много поработать. Но я думаю, что молодой человѣкъ, только что окончившій университетъ, болѣе подготовленъ къ преподаванію анализа безконечно-малыхъ величинъ, чѣмъ къ преподаванію ариѳметики, ибо съ первымъ онъ имѣлъ дѣло въ университетѣ, а со второй—не имѣлъ.

„Что же касается того, что преподаваніе анализа безконечно-малыхъ величинъ отниметъ время отъ другихъ предметовъ, то я долженъ сказать, что по крайней мѣрѣ въ корпусахъ время назначенное на математику при введеніи анализа нисколько не увеличено, т. е. число часовъ, которое было раньше, сохраняется и теперь. Что же касается благихъ намѣреній, которыми вымощенъ адъ, то на этотъ предметъ имѣются разныя мнѣнія, и я на этомъ вопросѣ останавливаться не буду. И такъ, я всецѣло поддерживаю ту мысль, что каждый изъ насъ долженъ много любовно поработать для этого дѣла, къ чему я господъ преподавателей и призываю".

Предсѣдатель. „Списокъ ораторовъ исчерпанъ. Заключая пренія по этому чрезвычайно важному вопросу, вызвавшему такой, скажу, ожесточенный споръ, вызвавшему въ Западной Европѣ коренныя реформы преподаванія, я хочу сказать нѣсколько словъ".

„Организаціонный Комитетъ несомнѣнно не дастъ этому вопросу потонуть въ морѣ вопросовъ, которые у насъ возникли на этомъ съѣздѣ. Будетъ-ли возможно подготовить окончательную резолюцію къ концу съѣда, будутъ-ли приняты другія какія-нибудь мѣры, о которыхъ я сейчасъ ничего не могу сообщить, такъ какъ послѣднее постановленіе объ этомъ не состоялось,—но въ томъ или другомъ смыслѣ Организаціонный Комитетъ несомнѣнно приметъ

мѣры къ тому, чтобы выяснить возможно полно взглядъ на это дѣло преподавателей, и если быть можетъ не къ концу Перваго, то ко Второму Съѣзду подготовитъ и сведетъ къ цѣлому авторитетное мнѣніе преподавательскаго персонала".

„Къ этому позвольте мнѣ прибавить отъ себя нѣсколько словъ. Я самъ много читалъ и думалъ относительно доводовъ „за" и „противъ" введенія высшей математики въ среднюю шкозу. Много доводовъ „за" и „противъ" было приведено и здѣсь съ каѳедры. Но именно здѣсь, съ этой каѳедры я услышалъ одинъ доводъ, который я теперь хочу подчеркнуть. Мнѣ не надо говорить о томъ, съ какой рѣшительностью оканчивающій математическій факультетъ, къ великому нашему сожалѣнію, сбрасываетъ этотъ багажъ высшей математики, оставляетъ его въ вестибюлѣ университета и рѣдко когда потомъ возвращается къ нему. Проходятъ два, три года, и забывается вся эта высшая математика. Поэтому я съ великой радостію слушалъ о томъ, какъ одинъ преподаватель вытащилъ изъ своего университетскаго сундука старичка Серре, свои старыя записки и заставилъ себя въ нихъ разобраться, чтобы составить курсъ для своихъ учениковъ. Такимъ образомъ, введеніе анализа безконечно-малыхъ величинъ заставитъ преподавателей обратиться къ изученію высшей математики. Конечно, не нужно говорить какую могущественную роль играетъ повышеніе умственнаго уровня преподавателей".

„И вотъ то, что я здѣсь слышалъ, было сильнымъ доводомъ для меня въ пользу введенія преподаванія высшей математики, ибо она повышаетъ не только уровень знанія и идей учениковъ, она послужитъ къ возвышенію уровня тѣхъ идей, среди которыхъ вращаются сами учителя".

—

ТРЕТЬЕ ЗАСѢДАНІЕ.

29 декабря $10^1/_2$ час. дня.

Въ предсѣдатели избранъ проф. П. А. Некрасовъ. Въ почетные секретари—І. И. Чистяковъ.

VII. Цѣли, формы и средства введенія историческихъ элементовъ въ курсъ математики средней школы.

Докладъ пр.-доц. В. В. Бобынина (Москва).

«Своимъ состоявшимся уже въ отдаленной древности введеніемъ въ сочиненія учебнаго характера по элементарной математикѣ историческіе элементы обязаны тому же коренящемуся въ свойствахъ духовной природы человѣка стремленію къ познанію генезиса находящихся въ распоряженіи человѣчества знаній, которое въ отдаленной древности создало миѳы для объясненія этого генезиса, а позднѣе привело къ созданію исторіи наукъ. Въ учебной математической литературѣ Среднихъ Вѣковъ, а черезъ нея и въ русской допетровскаго времени, историческіе элементы представлялись сказаніями миѳическаго характера въ родѣ слѣдующаго: «Книга, глаголемая ариѳмосъ, еже есть счетъ, иже древле-еллинскій мудрецъ Пиѳагоръ, сынъ Алинаноровъ, изобрѣтъ сію мудрость и на свѣтъ предаде наипаче хотящимъ сей ариѳметической мудрости учителя». Такъ представляется изобрѣтеніе ариѳметики въ одномъ типѣ рукописей. Въ рукописяхъ другого типа изобрѣтателемъ

ариѳметики представляется лицо уже совершенно миѳическое, именно «Сиръ, сынъ Асиноровъ», написавшій «численную сію Философію (то-есть ариѳметику) финическими (финикійскими) письменами».

Въ томъ же приблизительно видѣ представлялись историческіе элементы и въ большинствѣ учебниковъ послѣдующихъ эпохъ до новѣйшаго времени включительно. Въ нихъ, наприм., излагаются сказанія объ изобрѣтеніи Пиѳагоромъ предложенія о квадратѣ гипотенузы и о принесеніи имъ въ благодарность богамъ за это изобрѣтеніе гекатомбы, то-есть жертвы, состоящей изъ 100 быковъ. И сказанія эти содержатъ въ себѣ такъ же мало правды, какъ и приведенныя сейчасъ повѣствованія древне-русскихъ ариѳметическихъ рукописей объ изобрѣтателяхъ ариѳметики. Изобрѣтеніе Пиѳагоромъ приписываемаго ему предложенія уже давно подвергалось вполнѣ основательнымъ сомнѣніямъ. Теперь же, послѣ открытія и изученія древне-индусскихъ Sulva-Sutra's (правило веревки), все чаще и чаще начинаютъ приходить къ заключенію, что предложеніе о квадратѣ гипотенузы было вынесено Пиѳагоромъ изъ Индостана. Если это заключеніе является результатомъ изслѣдованій послѣдняго времени, то ложность сказанія о принесеніи Пиѳагоромъ въ жертву 100 быковъ была извѣстна очень давно, такъ какъ уже давно знали о безусловномъ запрещеніи въ религіозно-философскомъ ученіи древнихъ пиѳагорейцевъ всякой кровавой жертвы. Чтобы спасти это сказаніе отъ грозившаго ему изгнанія изъ науки, неопиѳагорейцы, представители философской школы, возникшей въ I вѣкѣ послѣ Р. Хр., утверждали, что принесенные Пиѳагоромъ въ жертву быки были сдѣланы изъ муки. Если для древнихъ временъ, создавшихъ приведенныя сказанія, эти послѣднія являются выраженіемъ недостаточной разработки или даже совершеннаго несуществованія Исторіи математики, то ничего подобнаго нельзя сказать о настоящемъ времени. Повтореніе тѣхъ же сказаній авторами учебниковъ элементарной геометріи въ новѣйшее время свидѣтельствуетъ только о недостаткѣ серьезнаго отношенія къ дѣлу и о важномъ пробѣлѣ современнаго математическаго образованія, происходящемъ отъ игнорированія Исторіи математики.

Ни съ какими опредѣленными и сколько-нибудь ясно со-

знанными цѣлями такая постановка историческихъ элементовъ въ учебникахъ элементарной математики связываться, конечно, не могла. А между тѣмъ правильная постановка въ курсѣ математики средней школы историческихъ элементовъ только и можетъ быть достигнута при наличности цѣлей указаннаго характера. Въ чемъ же эти цѣли должны состоять?

Извѣстный, какъ крупный дѣятель въ области преподаванія элементарной математики, германскій педагогъ первой половины XIX вѣка Дистервегъ говорилъ, что въ нѣмецкой публикѣ на математику смотрятъ, какъ на безплодную науку. Для этой публики «математикъ» и «сухой, непрактичный, поглощенный отвлеченностями и чуждый свѣту человѣкъ»—синонимы. Въ школахъ, по тѣмъ же ходячимъ въ публикѣ мнѣніямъ, изъ этой сухой науки и очень рѣдко и только нѣкоторая часть учащихся можетъ что-нибудь себѣ усвоить. Представители этой части въ общественномъ мнѣніи считались рѣдкими исключеніями и какъ бы для пустыхъ отвлеченій созданными умами. Переходя, хотя и въ значительно болѣе рѣдкихъ случаяхъ, къ противоположной крайности, вѣроятно подъ вліяніемъ сознанія собственной неспособности подняться на соотвѣтствующую высоту, «на нихъ смотрѣли, какъ на недосягаемыхъ геніевъ».

Если прежде таковы были въ большинствѣ случаевъ взгляды профановъ, то теперь они сдѣлались достояніемъ людей, мнящихъ себя компетентными. Довольно яркую характеристику отношеній къ математикѣ германскаго образованнаго общества въ настоящее время даетъ мюнхенскій профессоръ А. Фоссъ въ своей рѣчи Über das Wesen der Mathematik, произнесенной имъ 11 марта 1908 года въ публичномъ засѣданіи Королевской Баварской Академіи Наукъ. Указавъ на основное значеніе математики для современной культуры, онъ говоритъ: «И тѣмъ не менѣе математика, это твореніе человѣческаго духа, съ которымъ не можетъ быть сравниваемо по древности никакое другое, начало котораго мы съ увѣренностью можемъ прослѣдить болѣе чѣмъ на шесть тысячъ лѣтъ назадъ отъ нашего времени, все еще является изъ всѣхъ наукъ самою непопулярною! Конечно, быть непопулярною составляетъ неотъемлемое свойство существа каждой истинной науки. Овладѣть

такою наукою можно не черезъ пріятное случайное чтеніе, а только путемъ продолжительной неустанной работы. И въ то время, какъ *всякій въ общемъ сколько-нибудь образованный* человѣкъ владѣетъ нѣкоторымъ пониманіемъ въ отношеніи самыхъ выдающихся изъ другихъ областей знанія, именно въ отношеніи физики, астрономіи, описательныхъ естественныхъ наукъ, результатовъ языковѣдѣнія, исторіи философіи, такъ же какъ и порядка историческаго развитія, и считаетъ себя въ состояніи съ бо́льшимъ или меньшимъ успѣхомъ чувствовать и понимать прогрессъ этихъ наукъ, въ отношеніи математики вообще и въ обширныхъ размѣрахъ проявляется поразительно недостаточное разумѣніе, которое только въ очень малой мѣрѣ согласуется съ указанною выше общею высотою ея значенія, а въ отдѣльныхъ случаяхъ даже сказывается въ невѣроятномъ умаленіи ея значенія. Какъ часто приходится слышать о непреодолимомъ отвращеніи, которое питаютъ къ употребленію математическихъ формулъ даже люди, высоко-стоящіе въ духовномъ отношеніи. Какъ часто ставится вопросъ: чѣмъ собственно занимается математика и какъ могло случиться, что она играетъ въ нашей культурѣ ту важную роль, которая, какъ кажется, принадлежитъ ей и на самомъ дѣлѣ» [1]).

Причины выражающагося во всемъ этомъ непониманія того, въ чемъ собственно состоитъ сущность математики, Фоссъ видитъ частью въ трудности математическихъ изслѣдованій, какъ требующихъ по своему абстрактному характеру напряженной и упорно продолжаемой работы, для которой у погруженнаго въ практическую дѣятельность большинства человѣчества не легко даже можетъ быть найдено свободное время, частью же—въ общемъ строѣ современнаго воспитанія юношества. Ставя себѣ цѣлями развитіе логическаго мышленія и доставленіе практическихъ свѣдѣній, преподаваніе математики въ нашихъ школахъ строго замыкается въ той законченной области, которая называется элементарною математикою, и тѣмъ дѣлаетъ для себя невозможнымъ дать хотя какое-нибудь представленіе о той глубинѣ воззрѣній, которая характеризуетъ съ XVIII вѣка математическія изслѣдованія. Къ этому изложенію въ печат-

[1]) A. Voss, Über d. Wesen der Mathem. S. 4—5. (Есть русскій переводъ.)

номъ изданіи своей рѣчи Фоссъ прибавляетъ примѣчаніе, въ которомъ между прочимъ говоритъ: «Кто не пріобрѣлъ болѣе широкаго взгляда, тому не остается ничего другого, какъ только думать на основаніи вынесенныхъ изъ школы воспоминаній, что дѣятельность математика состоитъ въ рѣшеніи болѣе трудныхъ задачъ на построеніе и въ усовершенствованіи счета, или также, что открытіе возможно болѣе многихъ формулъ служитъ само себѣ цѣлью, при чемъ оно имѣетъ и практическую цѣнность» [1]).

Одинъ небезъизвѣстный въ русской педагогической литературѣ авторъ говорилъ въ 1901 году. Въ «общеобразовательномъ школьномъ курсѣ нѣтъ достаточныхъ основаній дѣлать математику обязательной для всѣхъ: она слишкомъ отвлеченна и далека отъ жизни, слишкомъ трудна для многихъ. Ея вліяніе на развитіе ума не представляетъ чего-либо особеннаго: тѣ основные мыслительные процессы, которые господствуютъ въ математикѣ, имѣютъ мѣсто и въ другихъ наукахъ, математика въ логическомъ отношеніи не даетъ ничего абсолютно новаго, что не могло бы быть достигнуто знакомствомъ съ другими науками... По этому намъ казалось бы излишнимъ включать математику, какъ самостоятельный предметъ, въ обязательный учебный курсъ для всѣхъ, предоставивъ ея изученіе тѣмъ, которые владѣютъ соотвѣтствующими способностями и которымъ отвлеченность математическихъ разсужденій не представитъ слишкомъ большихъ затрудненій» [2]). Не таковы, какъ извѣстно, взгляды на математику не только спеціалистовъ этой науки, но и простыхъ ея любителей. Они находятъ въ ней своеобразную высокую поэзію, а въ отношеніи достигнутой въ ней требуемыми ею мыслительными процессами степени развитія, а также и ихъ напряженности, они не знаютъ соперниковъ ей въ средѣ другихъ наукъ.

Оставлять учащихся при указанныхъ неправильныхъ взглядахъ на математику, выносимыхъ ими изъ семьи, общества и литературы, школа не должна и не можетъ, такъ какъ эти взгляды способны отбить у очень многихъ изъ учащихся, если

---

[1]) A. Voss. Üb. d. Wes. d. Math. S. 6.

[2]) Каптеревъ. Общеобразовательный школьный курсъ. Образованіе, 1901 г. (№ 12). Стр. 7—8.

не у большинства, всякую охоту къ занятіямъ математикою и тѣмъ въ корнѣ парализовать всѣ усилія школы къ достиженію въ дѣлѣ преподаванія математики положительныхъ результатовъ. Борясь съ упомянутыми взглядами въ средѣ учащихся, школа, какъ не трудно видѣть, беретъ на себя не менѣе важную задачу борьбы при посредствѣ учащихся съ тѣми же взглядами и въ самомъ ихъ источникѣ, то-есть, въ обществѣ и во вліяющей на него литературѣ. Къ устраненію между учащимися неправильныхъ взглядовъ на математику и къ замѣнѣ ихъ правильными, можетъ быть, могъ бы вести самый строй преподаванія математики, если бы таковой былъ выработанъ. За отсутствіемъ же его, единственнымъ источникомъ средствъ, ведущихъ къ той же цѣли, является Исторія математики съ такими своими фактами и эпизодами, какъ взаимоотношенія между философіею и математическими ученіями въ пиѳагорейской школѣ, какъ кипучая дѣятельность итальянскихъ математиковъ въ Эпоху Возрожденія и многіе другіе.

Бороться съ упомянутыми неправильными взглядами на математику не только въ школѣ, но и внѣ ея, въ обществѣ и литературѣ, въ настоящее время необходимо болѣе, чѣмъ когда-либо. Подъ вліяніемъ равнодушія большинства современныхъ представителей математики къ судьбамъ своей науки, доходящаго до оставленія безъ возраженій нападокъ графа Льва Толстого на математику, сторонники упомянутыхъ неправильныхъ взглядовъ начинаютъ уже переходить отъ словъ къ дѣлу, именно къ находящемуся въ полномъ согласіи со взглядами вышеуказаннаго автора устраненію математики изъ числа наукъ, избранныхъ для распространенія въ широкихъ слояхъ населенія. Наше время, и особенно у насъ въ Россіи, представляетъ въ отношеніи стремленія къ этому распространенію нѣкоторую аналогію съ Эпохою Возрожденія. Но какая громадная разница въ отношеніяхъ той и другой эпохи къ математикѣ. Предметами публичныхъ курсовъ и отдѣльныхъ публичныхъ чтеній, устраиваемыхъ въ наши дни обществами народныхъ университетовъ, различными учрежденіями и отдѣльными лицами, являются главнымъ образомъ политическія и юридическія науки и въ меньшей степени естественныя,

но никогда, или почти никогда, математика. Не такъ было въ Эпоху Возрожденія въ Италіи.

Муниципалитеты городовъ Венеціи, Перуджіи, Брешіи и другихъ учреждали на городскія средства публичные курсы по различнымъ математическимъ наукамъ. Лука Пачіуоло, наприм., изучалъ ставшія для него позднѣе главными спеціальностями ариѳметику и алгебру въ Венеціи у Доменико Брагадино, назначеннаго городскимъ управленіемъ публичнымъ преподавателемъ этихъ наукъ. Многіе итальянскіе математики и въ числѣ ихъ такіе выдающіеся, какъ тотъ же Лука Пачіуоло, Николай Тарталья, Карданъ, переѣзжали изъ города въ городъ для преподаванія математическихъ наукъ, при чемъ аудиторіями служили обыкновенно церкви.

Многочисленные слушатели свободно заявляли лекторамъ о своихъ нуждахъ и желаніяхъ, которыми тѣ нерѣдко и руководствовались при выборѣ предметовъ своихъ чтеній. Въ Германіи знаменитый художникъ Альбрехтъ Дюреръ, подобно Леонардо-да-Винчи въ Италіи, указывалъ на пользу и даже необходимость для художниковъ и ремесленниковъ математическихъ и въ частности геометрическихъ знаній.

Чтобы дать архитекторамъ и живописцамъ возможность пріобрѣсть эти знанія, онъ написалъ свои извѣстныя Institutionum geometricarum libri IV, явившіяся первымъ звеномъ въ длинной цѣпи работъ, создавшихъ въ Западной Европѣ науку о высшихъ кривыхъ въ томъ видѣ, какой она имѣетъ въ настоящее время. Подъ непосредственнымъ вліяніемъ указанныхъ взглядовъ Дюрера городское управленіе Нюренберга учредило для ремесленниковъ и художниковъ публичные курсы математики и въ особенности геометріи. Въ соединеніи съ существовавшими уже ранѣе въ городѣ цыфирными школами эти курсы сдѣлали его на нѣкоторое время, какъ извѣстно, центромъ математическаго образованія въ Германіи.

Въ школѣ, въ средѣ учащихся, вопросъ о пользѣ математики возникаетъ тогда же, когда онъ возникалъ и во всемъ человѣчествѣ, то-есть послѣ перехода отъ занятій практическимъ искусствомъ счета и измѣреніемъ простѣйшихъ геометрическихъ протяженій къ изученію теоретической геометріи и началъ теоретической ариѳметики и алгебры. Этотъ

переходъ соотвѣтствуетъ, дѣйствительно, въ исторіи человѣчества смѣнѣ до-научнаго періода развитія математики научнымъ. До этого перехода не было мѣста ни для какихъ сомнѣній въ значеніи и пользѣ математики, такъ какъ и повседневный житейскій опытъ и подборъ предлагаемыхъ задачъ равно показывали учащемуся ея практическую пользу. Послѣ упомянутаго перехода прежняя ясность значенія и пользы математики смѣнилась полною неясностью и притомъ не только для ученика средней школы, но и для такихъ умовъ, какими были Сократъ и многіе другіе философы. Для чего нужна чистая наука, неспособная, повидимому, ни къ какимъ практическимъ приложеніямъ, а потому и не приносящая никакой пользы? Какое значеніе могутъ имѣть доказательства предложеній ариѳметики и геометріи, когда ихъ справедливость можетъ быть повѣрена на частныхъ числовыхъ примѣрахъ въ первой и при помощи чертежа во второй? Вотъ вопросы, которые обыкновенно представляются уму ученика. Оставить ихъ, а также и указанныя сомнѣнія, неразрѣшенными — это значитъ обречь учащагося на болѣе или менѣе скорую утрату всякаго интереса къ математикѣ, на занятія ею только по преслѣдующему невѣдомыя цѣли приказу и, наконецъ, къ болѣе или менѣе ясно сознаваемому взгляду на этотъ приказъ, какъ на насиліе, совершаемое надъ учащимися, противъ котораго являются допустимыми всякія находящіяся въ распоряженіи учащагося средства, не исключая даже и несогласныхъ съ нравственными правилами. Все это въ прежнее время сознавалось и преподавателями и авторами учебниковъ. Первые произносили въ присутствіи учащихся и посторонней публики рѣчи о пользѣ математики, вторые посвящали тому же предмету предисловія и введенія въ свои сочиненія. Вначалѣ риторичность и напыщенность этихъ рѣчей и писаній при скудости содержанія и слабости аргументаціи, а позднѣе—отвлеченность, дѣлали ихъ вліяніе на учащихся и постороннюю публику на столько незначительными, что ихъ пришлось, какъ это наблюдается въ настоящее время, почти совсѣмъ оставить. На мѣсто ихъ для достиженія вліянія, по крайней мѣрѣ, на учащихся въ разсматриваемомъ направленіи необходимо поставить заимствованные изъ Исторіи наукъ математическихъ конкретные примѣры.

Крупнѣйшими между примѣрами указаннаго рода изъ числа не выходящихъ за предѣлы элементарной математики являются слѣдующіе. Во-первыхъ, крайняя отсталость и жалкое вообще состояніе, которыя сдѣлались удѣломъ древнегреческаго землемѣрія послѣ того, какъ въ своемъ качествѣ прикладной отрасли знанія оно сдѣлалось предметомъ игнорированія для геометровъ пиѳагорейской школы, а затѣмъ въ школѣ Аристотеля и совсѣмъ было исключено изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи. Когда древнегреческая геометрія обладала уже твореніями Архимеда и александрійскихъ геометровъ, тогда въ современномъ ей древнегреческомъ землемѣріи исповѣдывалось еще ложное ученіе до-научнаго періода развитія наукъ математическихъ о равенствѣ площадей при равенствѣ периметровъ.

Во-вторыхъ, вызванное подобнымъ же исключеніемъ механики въ школѣ Платона изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи, отсутствіе въ Аѳинахъ и вообще въ коренной Греціи, а также и въ Александріи сколько-нибудь замѣтнаго движенія этой науки впередъ. Тѣми успѣхами, которыхъ она достигла въ это время и которые выразились въ трудахъ Архимеда по Статикѣ и Гидростатикѣ, она была обязана Архиту Тарентскому и вообще итальянскимъ пиѳагорейцамъ и ихъ позднѣйшимъ ученикамъ, какъ не послѣдовавшимъ примѣру школы Платона и не исключившимъ механику изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи. Послѣ этихъ двухъ примѣровъ, какъ относящихся къ теоретической геометріи, третій слѣдуетъ выбрать изъ числа, относящихся къ теоретической ариѳметикѣ. Такимъ примѣромъ могутъ послужить нужды калькуляторскаго искусства, нашедшія свое удовлетвореніе въ изобрѣтеніи логариѳмовъ. Въ эпохи, предшествующія этому изобрѣтенію, совершившемуся, какъ извѣстно, въ области чуждой ариѳметикѣ, именно на почвѣ соображеній, заимствованныхъ изъ механики, сколько-нибудь значительныя вычисленія встрѣчались съ очень большими трудностями и требовали очень много времени и труда. Всѣ эти трудности и тяжелыя неудобства были бы устранены, если-бы теоретическія изслѣдованія и ихъ философскій характеръ стояли въ области теоретической ариѳметики на болѣе значительной

высотѣ, чѣмъ это было въ дѣйствительности! Тогда можно бы было, говоря относительно, довольно рано усмотрѣть наряду съ извлеченіемъ корня существованіе еще и другого обращенія дѣйствія возвышенія въ степень и тѣмъ придти къ открытію логариѳмовъ гораздо ранѣе, чѣмъ это совершилось въ дѣйствительности.

Въ курсѣ математики средней школы существуютъ статьи, которыя при нынѣшней постановкѣ преподаванія не только трудно даются учащимся при первоначальномъ изученіи, но и затѣмъ для большинства ихъ остаются на все время пребыванія въ средней школѣ усвоенными недостаточно и поверхностно. Какъ на болѣе крупныя и важныя изъ такихъ статей можно указать въ ариѳметикѣ на посвященныя системамъ счисленія (преимущественно десятичной), ихъ законамъ и приложеніямъ, а въ геометріи на пользующіяся методомъ исчерпыванія древнихъ и его видоизмѣненіями. Углубить въ достаточной степени пониманіе учащимися этихъ предметовъ можетъ только ознакомленіе съ исторіею ихъ развитія. При этомъ главное вниманіе должно быть обращено въ первомъ изъ указанныхъ случаевъ на исторію развитія системъ счисленія и ихъ приложеній, главнѣйшими изъ которыхъ являются словесная и письменная нумераціи, а во второмъ — на изложеніе болѣе характеристичныхъ и полныхъ изъ примѣровъ употребленія метода исчерпыванія въ математической литературѣ древней Греціи. Изученіе всего указаннаго сейчасъ не только углубитъ пониманіе учащимися относящихся сюда предметовъ, но и въ значительной степени расширитъ уже пріобрѣтенныя ими въ соотвѣтствующихъ областяхъ познанія. Цѣнность и важность этихъ пріобрѣтеній для учащихся на столько очевидны, что останавливаться на нихъ далѣе нѣтъ надобности. Для примѣра же достаточно замѣтить, что во второмъ изъ указанныхъ случаевъ учащіеся ознакомятся съ такими важными для изученія высшей математики предметами, какъ начало и первыя формы Высшаго Анализа.

Также какъ на одинъ изъ видовъ пользы, которую могутъ извлечь учащіеся изъ введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ слѣдуетъ указать на производимое ими установленіе передъ сознаніемъ

учащихся связи отдѣльныхъ частей элементарной математики съ реальными образами, представляемыми личностями ученыхъ и историческими фактами, и съ духовными—въ видѣ идей изъ области логики и философіи. Эта связь, что ясно само собою, является могущественнымъ средствомъ укрѣпленія въ памяти учащихся преподаннаго имъ содержанія элементарной математики не только въ теченіе прохожденія школьнаго курса, но и на время болѣе продолжительное, чѣмъ при существующихъ условіяхъ, послѣ выхода изъ школы.

Кромѣ указанныхъ главныхъ цѣлей введенія историческихъ элементовъ въ курсъ математики средней школы могутъ быть преслѣдуемы и еще нѣкоторыя, въ родѣ, наприм., во-первыхъ, развитія если не у всѣхъ учащихся, то, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторой ихъ части сознательнаго и глубокаго интереса къ математикѣ и ея успѣхамъ и, во-вторыхъ, возбужденія въ той же части учащихся стремленій къ самостоятельной творческой работѣ въ области математики. Достиженію этой послѣдней цѣли особенно большое содѣйствіе можетъ оказать изученіе учащимися біографій выдающихся математиковъ Древняго Міра и болѣе позднихъ эпохъ, какъ это уже много разъ наблюдалось и въ самой математикѣ и въ другихъ наукахъ, а также въ искусствахъ и различныхъ отрасляхъ человѣческой дѣятельности.

Историческіе элементы могутъ быть введены въ преподаваніе математики въ средней школѣ въ одномъ изъ двухъ видовъ: въ формѣ систематическаго изученія исторіи элементарной математики или въ формѣ эпизодическаго. Главными препятствіями употребленію первой формы являются: во-первыхъ, недостатокъ времени и, во-вторыхъ, несоотвѣтствіе умственнаго развитія большинства учащихся, если не всѣхъ, той его ступени, которая требуется природою предмета, какъ имѣющаго философскій характеръ. Остается, слѣдовательно, вторая форма, да и то подъ условіемъ изложенія заимствуемыхъ изъ исторіи математики статей въ формѣ, доступной для учащихся.

При недостаточности времени, которое обыкновенно отводится преподаванію математики въ средней школѣ, едва ли можно серьезно думать о введеніи исторіи математики, даже

при эпизодической формѣ ея изученія, въ число предметовъ, непосредственно преподаваемыхъ въ школѣ. Это изученіе должно быть предоставлено самодѣятельности учащихся, конечно, подъ условіемъ контроля, а въ случаяхъ необходимости, также и помощи со стороны преподавателя. Цѣлесообразно подобранный и въ строгомъ соотвѣтствіи со степенью умственнаго развитія учащихся изложенный матеріалъ для приложенія въ настоящемъ случаѣ ихъ самодѣятельности долженъ быть соединенъ въ сборники. Такъ какъ въ этомъ матеріалѣ могутъ и даже должны быть введены наряду со статьями историко-математическаго содержанія также и удовлетворяющіе условіямъ цѣлесообразности и доступности для учащихся отрывки произведеній древней математической литературы, то самою удобною для этихъ сборниковъ формою является форма историко-математической христоматіи, которая, поэтому, и должна быть избрана».

Конспектъ.

1. Состоявшееся уже въ глубокой древности введеніе историческаго элемента въ сочиненія, назначенныя для первоначальнаго изученія элементарной математики, было разультатомъ коренящагося въ свойствахъ духовной природы человѣка стремленія къ познанію генезиса находящихся въ распоряженіи человѣчества знаній. Это стремленіе выразилось въ созданіи сперва миѳовъ для объясненія упомянутаго генезиса, и позднѣе исторіи наукъ.

2. Въ изложеніи упомянутыхъ миѳовъ съ бóльшими или меньшими подробностями и состояло введеніе историческаго элемента въ учебныя сочиненія по элементарной математикѣ, какъ въ древности, такъ и въ новое и даже новѣйшее время. Примѣромъ могутъ служить дошедшіе черезъ преемственную передачу до учебниковъ элементарной геометріи послѣдняго времени миѳы объ изобрѣтеніи Пиѳагоромъ теоремы о квадратѣ гипотенузы и о принесеніи имъ въ благодарность богамъ за это изобрѣтеніе жертвы въ 100 быковъ.

3. Никакого сколько-нибудь яснаго представленія о цѣляхъ введенія въ учебники элементарной математики историческаго элемента при такомъ его положеніи существовать, конечно, не могло.

4. Учащимся въ средней школѣ обыкновенно приходится встрѣчаться въ семьѣ и обществѣ съ отрицательными взглядами на математику, поддерживаемыми и распространяемыми не только Л. Н. Толстымъ и его послѣдователями, но даже и нѣкоторыми произведеніями педагогической литературы. Оставлять учащихся при этихъ взглядахъ школа не можетъ, такъ какъ ими обрекаются на неудачу всѣ ея усилія къ достиженію положительныхъ результатовъ въ дѣлѣ преподаванія математики. Наиболѣе дѣйствительныя для настоящаго времени средства устраненія отрицательныхъ взглядовъ на математику можетъ дать только исторія математики. Въ этомъ и должна состоять *одна* изъ цѣлей введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Необходимость преслѣдованія этой цѣли дѣлается въ настоящее время особенно настоятельною, такъ какъ сторонники отрицательныхъ взглядовъ на математику начинаютъ мало-по-малу переходить отъ словъ къ дѣлу, именно—къ проведенію своихъ взглядовъ въ самую организацію школьнаго преподаванія, хотя пока и въ очень ограниченной области, имѣвшей несчастіе сдѣлаться имъ доступною.

5. Переходъ отъ занятій практическимъ искусствомъ счета и связанными съ нимъ измѣреніями также практическаго характера къ изученію теоретической части элементарной математики приводитъ учащихся въ средней школѣ, какъ въ свое время и все человѣчество, къ вопросу о пользѣ математики. Употреблявшіяся прежде для рѣшенія этого вопроса въ положительномъ смыслѣ діалектическія средства обыкновенно или совсѣмъ не достигали своей цѣли или если и достигали то на непродолжительное время и въ очень ограниченной сферѣ дѣйствія. На смѣну имъ въ качествѣ болѣе дѣйствительныхъ могутъ быть поставлены въ настоящее время прямыя доказательства пользы и значенія математики, доставляемыя ея Исторіею. Въ этомъ нельзя не видѣть *другой*

цѣли введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ.

6. Въ курсѣ математики средней школы существуютъ статьи, которыя при нынѣшней постановкѣ преподаванія не только трудно даются учащимся при первоначальномъ изученіи, но и затѣмъ для большинства ихъ остаются на все время пребыванія въ средней школѣ усвоенными недостаточно и поверхностно. Углубить въ достаточной степени пониманіе учащимися предметовъ упомянутыхъ статей можетъ только ознакомленіе съ исторіею развитія этихъ предметовъ. Неминуемымъ слѣдствіемъ такого ознакомленія должно быть также, какъ это понятно само собою, болѣе или менѣе значительное расширеніе въ количественномъ отношеніи тѣхъ свѣдѣній по соотвѣтствующимъ предметамъ, которые были оставлены учащимся преподаваніемъ математики. Углубленіе пониманія и расширеніе свѣдѣній учащихся при помощи Исторіи математики въ разсматриваемыхъ сейчасъ случаяхъ составляютъ *третью* цѣль введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ.

7. Кромѣ указанныхъ до сихъ поръ цѣлей, имѣющихъ въ виду всѣхъ учащихся средней школы, введенію историческихъ элементовъ въ преподаваніе въ ней математики могутъ быть поставлены еще и спеціальныя цѣли, имѣющія въ виду вербовки лицъ, склонныхъ посвятить свою будущую дѣятельность математикѣ. Одною изъ такихъ спеціальныхъ цѣлей является развитіе у учащихся упомянутой категоріи сознательнаго и возможно болѣе глубокаго интереса къ математикѣ и ея успѣхамъ, а другою—возбужденіе въ той же категоріи учащихся стремленій къ самостоятельной творческой работѣ въ области математики. Какъ на важнѣйшее изъ средствъ достиженія этихъ цѣлей, и въ особенности второй, слѣдуетъ указать на ознакомленіе учащихся съ біографіями выдающихся математиковъ Древняго Міра и болѣе позднихъ эпохъ.

8. Историческіе элементы могутъ быть введены въ преподаваніе математики въ средней школѣ въ одномъ изъ двухъ видовъ: въ формѣ систематическаго изученія исторіи элементарной математики или въ формѣ эпизодическаго. Недостатокъ времени, а также и несоотвѣтствіе умственнаго развитія

большинства учащихся, если не всѣхъ, той его ступени, которая требуется природою исторіи математики, какъ предмета, имѣющаго философскій характеръ, являются главными препятствіями употребленію первой изъ указанныхъ формъ введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Остается, слѣдовательно, вторая форма, да и то подъ условіемъ изложенія заимствуемыхъ изъ Исторіи математики статей въ формѣ, доступной для учащихся.

9. При недостаточности времени, которое обыкновенно отводится преподаванію математики въ средней школѣ, едва ли можно серьезно думать о введеніи Исторіи математики, даже при эпизодической формѣ ея изученія, въ число предметовъ, непосредственно преподаваемыхъ въ школѣ. Это изученіе должно быть предоставлено самодѣятельности учащихся, конечно, подъ условіемъ контроля, а въ случаяхъ необходимости также и помощи со стороны преподавателя. Цѣлесообразно подобранный и въ строгомъ соотвѣтствіи со степенью умственнаго развитія учащихся изложенный матеріалъ для приложенія въ настоящемъ случаѣ ихъ самодѣятельности долженъ быть соединенъ въ сборники. Такъ какъ въ этотъ матеріалъ могутъ и даже должны быть введены наряду со статьями историко-математическаго содержанія также и удовлетворяющіе условіямъ цѣлесообразности и доступности для учащихся отрывки произведеній древней математической литературы, то самою удобною для этихъ сборниковъ формою является форма историко-математической христоматіи, которая поэтому и должна быть избрана.

Пренія по докладу В. В. Бобынина.

А. И. Лещенко (Кіевъ). „Большого значенія историческаго элемента въ преподаваніи ариѳметики, конечно, отрицать не приходится, но нельзя видѣть въ немъ панацею отъ всѣхъ золъ. И въ докладѣ, и въ конспектѣ, и въ самой рѣчи высказывалось, что нужно ввести въ школу не только эпизодическій, но даже систематическій курсъ исторіи математики. Съ этимъ я не могу согласиться. Переходя къ практической сторонѣ занятій, къ искусству

счета, я нахожу неправильной мысль относительно пользы математики понятія—интересъ и польза смѣшаны. Затѣмъ я отмѣтилъ бы то обстоятельство, что слишкомъ неопредѣленно высказаны тѣ способы, какими будетъ ученикамъ преподноситься историческій матеріалъ. Конкретное предложеніе доклада сводится лишь къ изданію хрестоматіи. Отрицать значеніе хрестоматіи я не стану, но желалъ бы чтобы, во-первыхъ, были указаны тѣ практическіе пріемы, которые нужны для работы съ историческимъ матеріаломъ; во-вторыхъ, чтобы болѣе опредѣленно былъ отмѣченъ возрастъ, когда слѣдуетъ подходить къ ученику съ элементами математики. Эта сторона въ докладѣ совершенно упущена".

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб). „Какъ учитель я долженъ сказать, что ученики интересуются вопросами историческими. Они не знаютъ, какъ великъ возрастъ *современной* ариѳметики. Они не понимаютъ, какъ велико то благодѣяніе, которое представляетъ собою ариѳметика. Они не знаютъ, что она еще не было извѣстна въ XV—XVI вв. въ той формѣ, какъ извѣстна намъ".

„Одно лицо, бывшее ревизоромъ по учебной части въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ одного вѣдомства, пріѣхало въ среднюю школу случайно на урокъ космографіи и предложило взрослому ученику, отвѣчавшему по космографіи, вопросъ: „Когда жилъ Коперникъ — до Рождества Христова или послѣ? Мальчикъ нисколько не смутился и сказалъ: „Конечно, до Рождества Христова".

„Ученики не знаютъ ничего по исторіи математики. Въ извѣстной книгѣ Рихарда Бальцера «Элементы математики» есть подстрочныя примѣчанія; если бы учителя пользовались хотя бы только ими, то и это принесло бы пользу. Они своевременно могли бы на классной доскѣ записывать имена: Аполлонія, Архимеда, Эвклида съ нумерами столѣтій въ скобкахъ; имя Гаусса — при изученіи правильныхъ многоугольниковъ; имя Лагранжа—при изученіи разложенія всякихъ чиселъ на сумму 4-хъ квадратовъ, и т. п. Если бы преподаватели сообщали эти свои замѣчанія такимъ образомъ, чтобы ученики познакомились съ Ньютономъ и чувствовали благоговѣніе передъ этимъ именемъ, то это было бы полезно для умственнаго, нравственнаго и культурнаго развитія учениковъ. Это чувство благоговѣнія передъ наукою будетъ вызывать и чувство уваженія къ учебному предмету".

М. Г. Ребиндеръ (Юрьевъ). „Я лично ничего не имѣю противъ введенія историческихъ свѣдѣній въ курсъ математики, но долженъ обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство: если мы будемъ вводить свѣдѣнія по исторіи математики въ курсъ самой математики, то мы раздвоимъ вниманіе ученика. Мнѣ кажется, что введеніе этой исторіи непосредственно на урокахъ математики представляетъ значительныя техническія трудности потому, что мы при

этомъ нарушаемъ опредѣленныя дидактическія правила, именно—направлять вниманіе учениковъ на опредѣленную точку, сосредоточивать его въ одномъ центрѣ. Если будемъ раздваивать вниманіе, то, гоняясь за двумя зайцами, не поймаемъ ни одного. Что касается указанія, что ученикъ можетъ ошибаться въ хронологіи, то эти ошибки онъ дѣлаетъ и на урокахъ исторіи, такъ что введеніе историческаго элемента въ курсъ математики вовсе не гарантируетъ ученика, что онъ не отдалитъ время Коперника до Рождества Христова. Оканчивая свое замѣчаніе, я могу пожелать, чтобы на исторію математики обратили вниманіе гораздо больше чѣмъ въ настоящее время, такъ же какъ и на исторію другихъ наукъ, но какъ на отдѣльный предметъ, а не какъ на суррогатъ къ математикѣ".

В. М. Куперштейнъ (Елизаветградъ). „Совершенно понятно, что здѣсь приходится слышать нѣкоторыя прибавки къ тому, что было сказано докладчикомъ В. В. Бобынинымъ, такъ какъ вопросъ объ исторіи математики въ школьномъ курсѣ для многихъ является совершенно новымъ. Мнѣ кажется, что исторія математики непременно должна изучаться въ школѣ. Значенія, прелести, красоты математики не понимаютъ ни дѣти начальныхъ школъ, ни ученицы, оканчивающія 8-й классъ гимназіи. Если не вся наша молодежь, то огромная часть учащихся въ средней школѣ и представленія объ этомъ не имѣетъ. Если бы дѣти поняли, что математика есть нѣчто, цѣльное красивое, они съ бо́льшей охотой занимались бы ею, особенно въ старшихъ классахъ. Какъ исторію математики преподавать, какими средствами—въ докладѣ не указано, но развѣ можно въ одномъ докладѣ все это сказать. Мы должны пожелать, чтобы исторія математики была введена въ курсъ средней школы".

С. А. Неаполитанскій (Варшава). „Одинъ изъ предыдущихъ ораторовъ говорилъ, какими способами можно знакомить учениковъ съ историческими элементами. Я полагаю, что наилучшій способъ реферативный. Такъ, напр., въ Кавказскомъ Округѣ при нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ устраиваются рефераты: преподавателемъ избирается для разработки какой-нибудь практическій или теоретическій вопросъ и указывается ученикамъ матеріалъ по этому вопросу. Для рефератовъ назначается время не урочное, а праздничное, въ присутствіи желающихъ заниматься учениковъ. Послѣ реферата происходятъ пренія. Если на ряду съ обработкой теоретическихъ и практическихъ вопросовъ въ темы рефератовъ ставить разработку историческихъ вопросовъ, то такимъ образомъ можно познакомить учениковъ хоть немного съ историческимъ элементомъ".

В. Е. Загулинъ (Екатеринославъ). „Уважаемый докладчикъ В. В. Бобынинъ поднялъ вопросъ высокой важности, именно, онъ

указалъ на важное значеніе исторіи математики. Въ средней школѣ безъ особеннаго труда можно провести этотъ курсъ въ достаточно полномъ объемѣ. Для этого нужно или ввести отдѣльные уроки, или отвести небольшое время на самыхъ урокахъ математики. Конечно, на урокахъ математики можно знакомить учениковъ лишь очень кратко съ исторіей математики, указывая, напр., дату, когда была установлена или доказана та или другая теорема. Это имѣло-бы значеніе и для удержанія въ памяти самой теоремы, ибо память учениковъ лучше удерживаетъ то, что освѣщено съ нѣсколькихъ сторонъ. Кромѣ этого, необходимо рекомендовать для чтенія различныя сочиненія по исторіи математики. Въ настоящее время такихъ сочиненій имѣется уже нѣсколько на русскомъ языкѣ, какъ оригинальныхъ, такъ и переводныхъ; они могутъ доставить ученикамъ среднихъ школъ матеріалъ для самостоятельныхъ работъ по исторіи математики".

В. Я. Гебель (Москва). „Я принадлежу къ горячимъ сторонникамъ введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики. Я думаю, что въ этой залѣ едва ли будетъ кто-нибудь принципіально отвергать воспитательную, образовательную и глубокогуманитарную сторону историческаго элемента въ какой-либо наукѣ, и поэтому я думаю, что противниковъ введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики въ этой залѣ нѣтъ; но, съ другой стороны, представимъ себѣ положеніе преподавателя. Мои предшественники высказали мысль, что у насъ есть въ настоящее время довольно много историческихъ сочиненій по математикѣ. Съ этимъ я не могу согласиться. Вѣдь, кромѣ Кэджори, у насъ ни одного систематическаго сочиненія нѣтъ. Къ этому я могу причислить еще Лоренца и труды почтеннаго докладчика, но труды докладчика относятся къ различнымъ отдѣльнымъ моментамъ и эпохамъ исторіи математики и не представляютъ цѣльной исторіи математики. Точно такъ же еще можно назвать и нѣсколько другихъ монографій по отдѣльнымъ предметамъ оригинальныхъ или переводныхъ, но исторіи, кромѣ Кэджори, нѣтъ, да и тамъ значительная часть свѣдѣній, цѣнныхъ для школъ англійскихъ, но мало интересныхъ для русскихъ. А если литературы по этому вопросу нѣтъ, то нельзя и спрашивать отъ преподавателя, чтобы онъ этотъ вопросъ рѣшилъ въ положительномъ смыслѣ. Я высказываю пожеланіе, чтобы у насъ какъ можно больше явилось элементарныхъ и болѣе подробныхъ сочиненій по исторіи математики".

Б. К. Чачхіани (Ярославль). „Тутъ были указаны нѣкоторыя сочиненія на русскомъ языкѣ по исторіи математики, но была пропущена книжка Белюстина: «Какъ люди дошли до настоящей ариѳметики» и книга по исторіи математики проф. Кіевскаго

Университета Ващенко-Захарченко; также пропущено сочиненіе Неводовскаго по геометріи съ предисловіемъ объ Эвклидовой геометріи Ващенко-Захарченко".

„Кромѣ недостатка на русскомъ языкѣ книгъ по исторіи математики, тормазомъ для практическаго введенія историческаго элемента въ курсъ средней школы могутъ быть и другія причины. Мнѣ приходится преподавать въ учительскомъ институтѣ и въ средней школѣ. Тогда какъ въ учительскомъ институтѣ очень легко ввести историческій элементъ, въ среднихъ школахъ мужскихъ и женскихъ не представляю себѣ возможнымъ это сдѣлать при существующемъ положеніи: изъ своей практики могу сказать, что тамъ по недостатку времени, которое уходитъ на систематическій курсъ, это почти невозможно. Указывали также на то раздвоеніе, которое получится на урокѣ математики, если вводить въ эти уроки историческій элементъ. Съ этимъ нельзя не согласиться, и слѣдовательно, надо назначать отдѣльные уроки для исторіи математики. Что касается рефератовъ, то они будутъ отчасти помогать этому дѣлу. Но откуда взять времени преподавателю и на подготовку къ этимъ рефератамъ, и на отдѣльныя вечернія практическія занятія, когда у него большею частью отъ 25 до 40 уроковъ; откуда найдется, наконецъ, время, чтобы прослушать эти рефераты? Дѣлая такія пожеланія, мы отойдемъ отъ жизни".

О. П. Перли (Ростовъ-на-Дону). „Позвольте высказать одно пожеланіе, относящееся къ преподавателямъ высшихъ школъ. Когда я былъ студентомъ и учился въ университетѣ, то курсъ исторіи математики не читался. Правда, я получилъ указаніе на труды Ващенко-Захарченко, но оттуда можно извлечь только нѣкоторыя свѣдѣнія, напр.. хронологическія даты. Къ сожалѣнію, я сегодня не пришелъ къ началу доклада и не слышалъ многоуважаемаго референта, именно не слышалъ—въ какой формѣ и какими средствами можно, по его мнѣнію, на практикѣ осуществить введеніе историческаго элемента въ курсъ средней школы,—тѣмъ болѣе я благодаренъ тѣмъ ораторамъ, которые указали нѣкоторыя средства, напримѣръ—реферативную систему. Я повторяю еще разъ пожеланіе, чтобы побольше высказывались о томъ, какъ вести это преподаваніе и откуда взять на это средства".

В. И. Андріановъ (Спб.). „Я долго не буду занимать ваше вниманіе, но скажу о преподаваніи исторіи математики слѣдующее. Здѣсь ставился вопросъ такъ: или преподавать исторію математики, какъ отдѣльный предметъ, или вводить ее эпизодически въ уроки математики. Чтó-же имѣетъ преимущество,—тотъ или другой способъ преподаванія исторіи математики? Если вводить ее какъ отдѣльный предметъ, то то же само нужно сдѣлать и для другихъ предметовъ школьнаго курса, напр., физики, химіи

и проч. Но цѣлесообразно ли это будетъ? Я думаю, что это будетъ крайне нецѣлесообразно, такъ какъ въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ и такъ достаточно предметовъ, и введеніе новаго отдѣльнаго предмета при существующей уже многопредметности не имѣетъ смысла. Другое дѣло, если бы признали, что исторія математики должна входить, какъ она и можетъ входить, эпизодически: это внесло бы полезное разнообразіе въ уроки математики. Такимъ способомъ можно и должно отвлекать вниманіе учениковъ, потому что нельзя себѣ представить, чтобы учащіеся въ теченіе 50 мин. могли сосредоточить вниманіе на одномъ предметѣ безраздѣльно. Противъ этого нельзя возражать, тогда пришлось бы возражать противъ опытовъ на урокахъ физики и химіи. Въ этихъ случаяхъ вниманіе учащихся отвлекается въ желательномъ направленіи".

В. В. Бобынинъ (Москва). „По поводу замѣчаній перваго оппонента я могу замѣтить слѣдующее. Можетъ быть я не ясно выразился, но только я не видѣлъ панацеи отъ всѣхъ золъ въ введеніи историческаго элемента въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Напротивъ, въ своей рѣчи я началъ съ того, что можетъ быть прежде всего слѣдуетъ строй преподаванія математики установить такъ, чтобы онъ самымъ своимъ содержаніемъ, своимъ характеромъ и направленіемъ устранялъ тѣ направленія и взгляды, которые учащіеся въ средней школѣ выносятъ изъ семьи, общества, литературы. Я сказалъ, что только при отсутствіи организаціи этого строя приходится обращаться къ исторіи математики, къ ея фактическимъ и эпизодическимъ примѣрамъ, которые я и привелъ. Относительно второго замѣчанія, въ которомъ говорилось, что въ докладѣ смѣшаны были—понятіе о пользѣ математики и понятіе объ интересѣ, я скажу, что такого смѣшенія не было, да и быть не могло. Замѣчаніе устраняется указаніемъ, что то, что становится не выясненнымъ для учениковъ въ указанное мною время прохожденія школьнаго курса, то это оказалось не яснымъ для такого великаго ума, какъ Сократъ. Сократъ, по свидѣтельству его ученика Ксенократа, говоритъ, что геометріи слѣдуетъ учить только по стольку, поскольку этого требуетъ практическая жизнь. Всякое возвышеніе надъ этимъ указаніемъ не только безполезно, но даже вредно въ глазахъ Сократа. Что же, спрашивается, Сократъ смѣшивалъ здѣсь вопросъ о пользѣ съ вопросомъ объ интересѣ? Я думаю, отвѣтъ ясный: онъ имѣлъ въ виду исключительно практическую пользу, а о поддержаніи интереса въ комъ-либо въ такихъ случаяхъ и рѣчи быть не можетъ. Относительно третьяго замѣчанія, указывающаго на неполноту и неопредѣленность содержащихся въ докладѣ указаній, относительно средствъ введенія историче-

скаго элемента въ преподаванiе математики въ средней школѣ, я отвѣчу, что неполнота, дѣйствительно, была, неопредѣленность также, но онѣ и не могли не быть, потому что предметъ этотъ только поставленъ на очередь не только у насъ, но и въ Западной Европѣ; не только нѣтъ рѣшенiй, но и указанiй, ведущихъ къ рѣшенiямъ, къ устраненiю неопредѣленности и неполноты не имѣется. Въ подтвержденiе своихъ словъ укажу, что въ ломбардскомъ Институтѣ Искусствъ и Наукъ въ Венецiи еще въ началѣ 90-хъ годовъ прошлаго 19-го столѣтiя поставили на конкурсъ составленiе, во-первыхъ, доступнаго для учащихся учебника по исторiи математики, и, во-вторыхъ, составленiе историко-математической хрестоматiи, правда, уже не для учениковъ, а для слушателей высшихъ учебныхъ заведенiй. Что же получилось? Премiя осталась не присужденной, и даже не потому, что на конкурсъ были представлены сочиненiя, незаслуживающiя премiи, а потому, что этихъ сочиненiй совсѣмъ не было представлено".

„Въ остальныхъ замѣчанiяхъ указывалось постоянно на отсутствiе времени, на невозможность или, по крайней мѣрѣ, на значительныя препятствiя къ введенiю историческаго элемента въ преподаванiе математики въ среднихъ школахъ. Съ этими замѣчанiями я вполнѣ согласенъ и въ своемъ докладѣ я постоянно имѣлъ въ виду и подчеркивалъ недостатокъ времени, находящагося въ распоряженiи преподавателей математики въ среднихъ школахъ. Въ виду этого я, именно, и указывалъ на невозможность введенiя преподаванiя историческаго элемента математики въ составъ непосредственно преподаваемыхъ предметовъ. Я указывалъ на необходимость предоставить этотъ вопросъ самодѣятельности учащихся, конечно, подъ контролемъ преподавателя и при его содѣйствiи въ тѣхъ случаяхъ, когда это является особенно нужнымъ. Затѣмъ, я долженъ выразить свое глубокое сочувствiе тѣмъ прiемамъ и средствамъ, которыя сейчасъ были указаны, къ которымъ уже обращались для введенiя историческаго элемента въ преподаванiе математики въ среднихъ школахъ, также и всему тому, что я слышалъ о желанiи ввести этотъ элементъ, о разныхъ средствахъ и прiемахъ для осуществленiя этого желанiя. Все это меня только порадовало, за все это я могу только благодарить, такъ какъ вижу въ этомъ начало осуществленiя того, что—могу сказать—всю жизнь меня интересовало".

— —

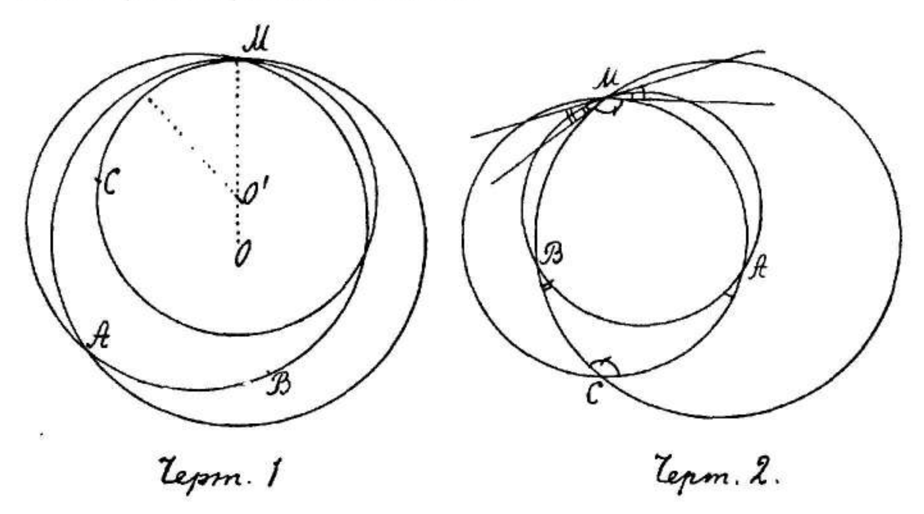
VIII. Неевклидова геометрія въ средней школѣ.

Докладъ П. А. Долгушина (Кіевъ).

«С. А. Богомоловъ въ своемъ блестящемъ докладѣ 27 дек. 1911 года: «Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія» предлагаетъ отдѣлить обширный пропедевтическій курсъ геометріи отъ строго—обоснованнаго систематическаго, мечтая увѣнчать послѣдній нѣкоторыми свѣдѣніями о геометріи нашего геніальнаго соотечественника Н. И. Лобачевскаго. Горячо присоединяясь къ основной мысли докладчика о раздѣленіи курса геометріи на пропедевтическій и систематическій, я вмѣстѣ съ тѣмъ утверждаю, что нѣтъ никакой надобности ожидать осуществленія такого раздѣленія для полученія возможности знакомить учащихся высшаго класса средней школы съ начатками Неевкидовой геометріи. Все дѣло въ выборѣ формы изложенія.

Въ 1905 и 1907 г.г. вышла въ свѣтъ въ двухъ громадныхъ томахъ замѣчательная работа В. Ѳ. Кагана «Основанія геометріи». Познакомившись изъ историческаго очерка развитія ученія объ основаніяхъ геометріи (стр. 204—213) съ интерпретаціей Неевклидовой геометріи французскимъ академикомъ Пуанкаре, я попробовалъ изложить эти идеи въ элементарной обработкѣ въ VIII кл. женской и мужской гимназіи. Опытъ оказался удачнымъ, и это дало мнѣ смѣлость выступить передъ Вами со своимъ докладомъ «Нееклидова геометрія въ средней школѣ». Мы съ дѣтства привыкаемъ связывать геометрію Евклида съ прямой и плоскостью. Чтобы показать независимость Евклидовой геометріи, какъ логической системы, отъ тѣхъ геометрическихъ образовъ, къ которымъ мы ее прилагаемъ, воспользуемся (по идеѣ Пуанкаре) связкой окружностей, лежащихъ въ одной плоскости и проходящихъ черезъ одну и ту же точку M (черт. 1), которая, предполагается, недоступна. Такимъ образомъ, каждая окружность связки является линіей разомкнутой (въ точкѣ M). Черезъ данную точку A, очевидно, можно провести безчисленное множество окружностей связки; эти окружности пересѣкаются въ точкѣ A; черезъ двѣ данныя точки A и B про-

ходитъ только одна окружность связки, потому что она вполнѣ опредѣляется точками A, B и M. Видимъ, что окружность связки осуществляетъ всѣ аксіоматическія свойства прямой Евклида. *Параллельными* окружностями связки называются окружности, не имѣющія ни одной общей доступной точки, т. е. касающіяся въ точкѣ M. Черезъ точку C, взятую внѣ окружности AB съ центромъ O, проходитъ только одна окружность связки, параллельная ей, потому что центръ такой окружности O^1 долженъ лежать на прямой MO и на оси симметріи отрѣзка AB. Выводы Евклидовой геометріи, основанные на свойствахъ прямыхъ и аксіомѣ параллельныхъ, справедливы и для образовъ, составленныхъ съ помощью окружностей разсматриваемой связки.



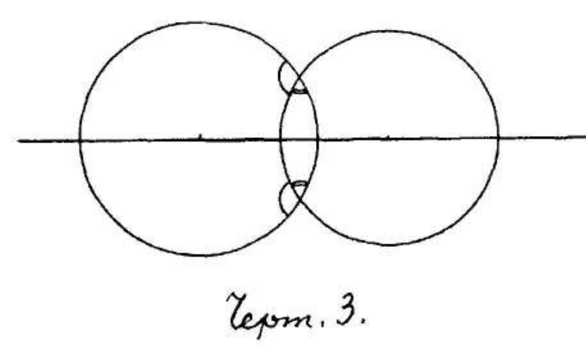
Черт. 1 Черт. 2.

Интересно, напр., провѣрить, что сумма внутреннихъ угловъ тр-ка ABC (черт. 2) равняется выпрямленному. Подъ угломъ двухъ пересѣкающихся кривыхъ разумѣется уголъ между касательными, проведенными къ кривымъ изъ точки ихъ пересѣченія.

Углы, образованные двумя пересѣкающимися окружностями при той и другой точкѣ ихъ пересѣченія, равны (черт. 3), такъ какъ фигура симметрична относительно прямой, проходящей черезъ центры окружностей. На черт. 2 углы, равные на основаніи этой теоремы, отмѣчены одинаковыми значками; видимъ, что сумма внутреннихъ угловъ тр-ка, образованнаго тремя пересѣ-

кающимися окружностями связки, равняется суммѣ угловъ, лежащихъ около точки M по одну сторону касательной, т. е. выпрямленному.

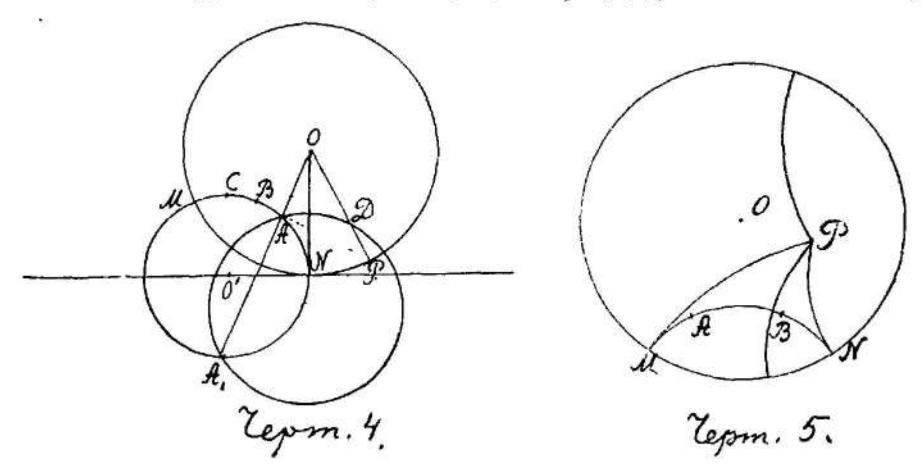
Такое толкованіе геометріи Евклида представляетъ прекрасный переходъ отъ обычной геометріи къ геометріи Неевклидовой.



Черт. 3.

Связка окружностей, перпендикулярныхъ къ данной *(основной)* окружности, можетъ дать намъ понятіе о геометріи Лобачевскаго, которая въ своихъ основаніяхъ отличается отъ геометріи Евклида только аксіомой параллельныхъ.

Если окружность O^1 перпендикулярна *(ортогональна)* къ основной окружности O, то (черт. 4) радіусы O^1N и ON,



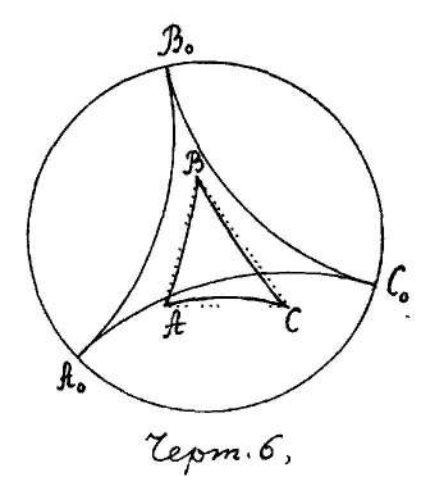
Черт. 4. Черт. 5.

проведенные въ точку N пересѣченія окружностей O и O^1, взаимно перпендикулярны, такъ какъ перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ касательнымъ; значитъ, всякая окружность O^1, центръ которой лежитъ на касательной къ окружности O, а радіусъ O^1N пересѣкаетъ послѣднюю подъ прямымъ угломъ.

Если полупрямая, исходящая изъ центра O, пересѣкаетъ ортогональную окружность O^1 въ точкахъ A и A_1, то $OA.OA_1 = ON^2$. Точки A и A_1 называются *взаимными относительно окружности* O. Изъ предыдущаго равенства видно, что точка A вполнѣ опредѣляетъ точку A_1 и наоборотъ. Чтобы построить точку A_1 по данной A, достаточно взять любую точку P на окружности O и въ углѣ POA провести изъ точки P антипараллель для PA, которая и пересѣчетъ полупрямую OA въ искомой точкѣ A_1. Наоборотъ, всякая окружность, проходящая черезъ пару взаимныхъ точекъ, перпендикулярна къ основной. Пусть точки A и A_1 взаимны относительно окружности O, т. е. $OA.OA_1 = OP^2$. Проведя изъ центра O касательную ON къ окружности O^1, найдемъ, что $ON^2 = OA.OA_1 = OP^2$, откуда $ON = OP$, т. е. точка N принадлежитъ окружности O^1 и окружности O, есть точка ихъ пересѣченія, причемъ O^1N и ON взаимно перпендикулярны, значитъ, окружности O^1 и O ортогональны. Если M и N точки пересѣченія окружностей O и O^1, то дуга MAN, заключающаяся внутри окружности O, играетъ роль прямой Лобачевскаго, при чемъ предполагается, что точки основной окружности недоступны. Очевидно, черезъ данную точку A проходитъ безчисленное множество прямыхъ Лобачевскаго, такъ какъ точки A и A_1 не опредѣляютъ окружности; черезъ двѣ данныя точки A и D проходитъ только одна прямая Лобачевскаго, потому что точки A, A_1 и D вполнѣ опредѣляютъ окружность связки.

Подъ длиной отрѣзка прямой Лобачевскаго (AB) разумѣютъ $k.\,lg\left(\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}\right)$, гдѣ AM, BM, AN, BN выражаютъ Евклидовскую длину дугъ. Пользуясь этимъ опредѣленіемъ, находимъ для трехъ послѣдовательныхъ точекъ A, B и C прямой Лобачевскаго, что $(AB) + (BC) = k\,.\,lg\left(\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}\right) + k.\,lg\left(\frac{BM}{CM} : \frac{BN}{CN}\right) = k\,.\,lg\left(\frac{AM}{CM} : \frac{AN}{CN}\right) = (AC)$: отрѣзки (AB) и (BC) аддитивны. Если точка B приближается къ M, то отношеніе $\frac{AM}{BM}$ возрастаетъ, а $\frac{AN}{BN}$ убываетъ, (AM) безконечно большой положительный отрѣзокъ; подобнымъ образомъ (AN) отрицательный отрѣзокъ, абсолютная величина котораго безконечно велика: точки M и N—безконечно-далекія точки.

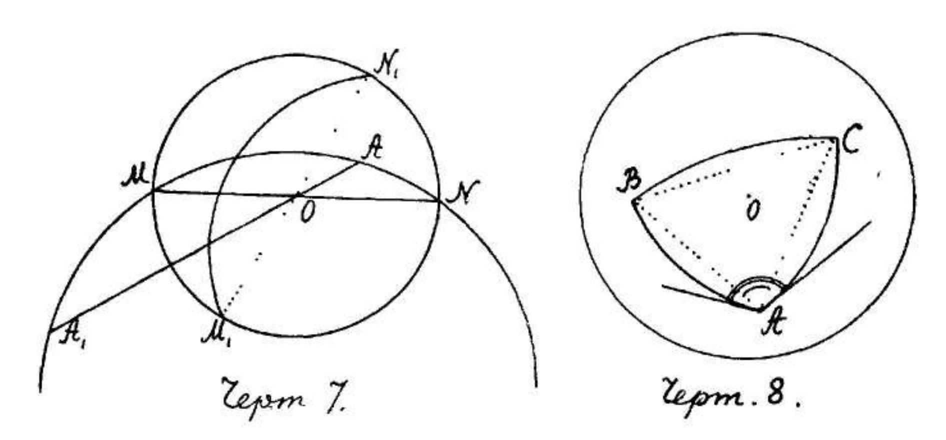
Возьмемъ P внѣ AB (черт. 5) и проведемъ полупрямыя Лобачевскаго PM и PN. Всякая полупрямая Лобачевскаго, идущая внутри угла MPN пересѣкаетъ MAN, остальныя полупрямыя, проведенныя изъ точки P, не встрѣчаютъ MAN; полу-



Черт. 6.

прямыя PM и PN называются *параллельными* прямой MAN (PM—по одному, PN—по другому направленію). Итакъ **черезъ точку внѣ прямой Лобачевскаго можно провести двѣ и только двѣ ей параллельныя полупрямыя.**

Замѣна Евклидовой аксіомы параллельныхъ аксіомой Лобачевскаго влечетъ за собой теорему: с у м м а в н у т р е н н и х ъ у г л о в ъ т р - к а, о г р а н и ч е н н а г о о т р ѣ з к а м и п р я м ы х ъ



Черт 7. Черт. 8.

Л о б а ч е в с к а г о, м е н ь ш е в ы п р я м л е н н а г о. На черт. 6 въ тр-кѣ Лобачевскаго ABC каждый уголъ меньше соотвѣтствующаго угла Евклидовскаго тр-ка ABC, и сумма ихъ, оче-

видно, меньше выпрямленнаго. Тр-къ Лобачевскаго $A_0B_0C_0$ наибольшій изъ всѣхъ возможныхъ, стороны его попарно параллельны, каждый уголъ равенъ нулю.

Связка окружностей, пересѣкающая данную (*основную*) окружность O по діаметру (черт. 7), даетъ намъ толкованіе геометріи Римана (точнѣе—одной изъ двухъ эллиптическихъ геометрій). Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, для точки A есть взаимная A, при чемъ $OA.OA_1 = ON^2$; дуга MAN прямая Римана; аксіоматическія свойства прямой тѣ же, что прямой Лобачевскаго, но **параллельныхъ нѣтъ**, такъ какъ всѣ діаметры основной окружности пересѣкаются въ центрѣ, а потому пересѣкаются и соотвѣтствующія дуги (на черт. 7 дуги MN и M_1N_1). Сумма внутреннихъ угловъ тр-ка, образованнаго Римановскими прямыми, больше выпрямленнаго, что совершенно очевидно изъ черт. 8.

Итакъ, пользуясь идеей Пуанкаре, мы можемъ съ помощью троякаго рода связокъ истолковать параллельно геометрію Евклида (*параболическую*), Лобачевскаго (*гиперболическую*) и Римана (*эллиптическую*). Въ каждой изъ этихъ геометрій устанавливается понятіе о движеніи и о разстояніи между точками.

Благодаря трудамъ Софуса Ли (S. Lee), мы можемъ обратить теорему и сказать: Если геометрическая система въ пространствѣ трехъ измѣреній имѣетъ конечную непрерывную группу движеній, если каждымъ двумъ точкамъ отвѣчаетъ опредѣленное разстояніе, которое не измѣняется при движеніи и обращается въ нуль только для двухъ совпадающихъ точекъ, а другихъ инваріантныхъ соотношеній между точками, не опредѣляемыхъ ихъ разстояніемъ, не существуетъ, то такая геометрическая система приводится либо къ геометріи Евклида, либо къ геометріи Лобачевскаго, либо къ геометріи Римана (см. «Основаніе геометріи» В. Ѳ. Кагана, 1907, стр. 384).

Изъ сопоставленія трехъ геометрій можемъ сдѣлать выводъ: аксіома параллельныхъ Евклида не зависитъ отъ остальныхъ аксіомъ».

IX. Содержаніе курса школьной математики.

Докладъ А. Г. Пичугина (Красноуфимскъ, Пермск. губ.).

«При переходѣ изъ гимназіи въ университетъ чувствуется большая пропасть между школьной и «высшей» математикой. Эта пропасть обусловливается самимъ матеріаломъ того и другого учебнаго заведенія.

Въ среднемъ преподносится ветхій матеріалъ: геометрическій, слегка подновленный, но почти неприкосновенный, созданный за 300 лѣтъ до Р. Х. Эвклидомъ и алгебраическій—накопившійся до 1620 года. Весь же богатый матеріалъ, пріобрѣтенный за послѣднія почти 300 лѣтъ, является достояніемъ высшей школы.

Но, кромѣ того, въ средней школѣ разсматриваются мертвыя, отвердѣлыя формы, въ высшей—живыя, измѣнчивыя—въ ихъ ростѣ, измѣненіи.

Вышеуказанное породило убѣжденіе, будто школьная математика—созданная въ древности, болѣе или менѣе отшлифованная въ средніе вѣка, завершенная въ новое время—мертвая наука и, вылившись въ твердую, неизмѣнчивую форму, должна существовать въ такомъ видѣ во вѣки вѣковъ...

Но съ этимъ взглядомъ не соглашается F. Klein. «Математика,—говоритъ онъ,—наука живая, она постепенно принимаетъ въ себя и перерабатываетъ новыя проблемы, отбрасываетъ устарѣлое и такимъ образомъ постоянно совершенствуется (verjungt). И это справедливо теперь только по отношенію къ высшей математикѣ, но тоже должно быть и съ школьной: она должна непрерывно преобразовываться соотвѣтственно медленно измѣняющимся общимъ запросамъ жизни и, конечно, въ предѣлахъ пониманія учащейся молодежи».

Сообразно этому новому взгляду на школьную математику и намѣчается суть реформы въ преподаваніи математики.

Основное понятіе о перемѣнной величинѣ и функціональной зависимости, изложенной въ наглядной формѣ (графически) должно проходить красною нитью черезъ курсъ средней школы.

Можетъ быть кто-нибудь скажетъ: весь смыслъ этой реформы заключается въ томъ, чтобы начала аналитической гео-

метріи, которая у насъ преподается въ VII кл. реальныхъ училищъ, совершенно, такъ сказать, растворить въ остальномъ математическомъ матеріалѣ.—Пожалуй, да! Но еще нужно замѣтить слѣдующее: здѣсь идетъ рѣчь не о той аналитической геометріи, данное уравненіе съ x и y которой разсматривается какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію,—каковой смыслъ и имѣетъ это отвердѣвшее уравненіе; нѣтъ, реформаторы имѣютъ въ виду такую аналитическую геометрію, въ которой господствуетъ вышеуказанный принципъ, въ которой, слѣдовательно, всегда проглядываетъ мысль, что съ измѣненіемъ независимаго перемѣннаго x измѣняется и зависящее отъ него y.

Далѣе, понятіе о функціи должно быть центральнымъ пунктомъ всего преподаванія математики. Но и здѣсь нужно оговориться. Не объ абстрактной идеи о функціональной зависимости здѣсь идетъ рѣчь, не объ обобщающей формулѣ этого понятія,—но только о конкретныхъ функціяхъ, наглядно представленныхъ въ декартовыхъ координатахъ и дающихъ возможность постичь яснѣе сущность указанной зависимости величинъ.

Эту точку зрѣнія не нужно забывать при преподаваніи ариѳметики.

При такомъ освѣщеніи алгебраическій матеріалъ представится въ иномъ видѣ: не только уже алгебраическія преобразованія, но и уравненія, рѣшеніе и изслѣдованіе ихъ (formale Gleichungstheorie) теряютъ главную роль и уступаютъ ее функціи, аналитическая геометрія въ указанномъ смыслѣ вкрапляется, вплетается въ алгебру. «Существенное области математическаго мышленія элементарной математики,—говоритъ F. Klein (1907 г., стр. 103),—заключается не въ формальномъ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій, а въ приближенномъ опредѣленіи корней уравненія графическимъ методомъ».

Неопредѣленныя уравненія и непрерывныя дроби теряютъ то значеніе, которое имъ придавали раньше.

И потому еще въ 1892 году, они, по предложенію G. Holzmüller'а, были изгнаны изъ программъ нѣмецкихъ гимназій и замѣнены ученіемъ о координатахъ и коническихъ сѣченіяхъ. «Такимъ образомъ, какъ говоритъ F. Klein, была сдѣлана по-

пытка нѣсколько подновить традиціонный матеріалъ согласно современнымъ требованіямъ». Кіевскій и Варшавскій планы дѣлаютъ уступку времени: первый исключаетъ непрерывныя дроби, а второй и неопредѣленныя уравненія. Ф. И. Павловъ эти отдѣлы находитъ «весьма цѣнными, ибо въ связи съ прочимъ матеріаломъ значительно повышаютъ математическій уровень развитія учащихся и закругляютъ ихъ знанія». (Р. Ш. 1909. X).

Противъ такой формальной мотивировки борется A. Höfler въ своей дидактикѣ и указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ на критерій, который опредѣляетъ содержаніе математическаго матеріала средней школы: это—понятіе о функціи. Его (понятіе о функціи) онъ называетъ естественнымъ вѣнцомъ математическаго преподаванія въ средней школѣ. Съ этой точки зрѣнія A. Höfler желаетъ оставить въ программѣ только неопредѣленныя уравненія 1 степени, какъ введеніе въ теорію чиселъ (Gitterpunkten). (Didaktik, стр. 359), а относительно непрерывныхъ дробей восклицаетъ: «Oder wird auch ihnen noch einmal ein Tag der Rückkehr kommen?» Новыя австрійскія программы въ духѣ реформы (1908 г.) уже не содержатъ ни того, ни другого.

F. Klein только условно допускаетъ теорію соединеній и биномъ Ньютона лишь въ программу реальныхъ училищъ: изъ теоріи соединеній только основы, да и то въ связи съ теоріей вѣроятности, а биномъ Ньютона—только въ положительныхъ и цѣлыхъ показателяхъ и то въ приложеніи къ приближенному вычисленію значенія функціи разверткой въ рядъ (графически). Меранская и Кіевская программы не содержатъ ни того, ни другого.

Такимъ образомъ освобождается время въ курсѣ школьной математики для началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія и вообще т. н. высшей математики, въ которой назрѣла потребность въ обыденной жизни съ прогрессомъ техники и въ сосѣднихъ областяхъ науки. Въ ней нуждаются и техники, и естественники, и медики, и юристы (въ статистикѣ: теорія вѣроятностей), и даже филологи-философы, если послѣдніе желаютъ изучать полнѣйшую философію.

Введеніемъ началъ высшей математики мы удовлетворимъ

еще одному требованію жизни—уничтожимъ ту пропасть, которая существуетъ между среднимъ и высшимъ учебнымъ заведеніемъ.

Но здѣсь идетъ рѣчь о началахъ высшей математики не въ округленномъ и законченномъ видѣ; эти начала должны слиться съ остальнымъ математическимъ матеріаломъ, должны вытекать изъ него. Тоже самое мы должны сказать и относительно ариѳметики, алгебры, геометріи и тригонометріи: долой китайскую стѣну между отдѣлами математики, между математикой и физикой съ космографіей.

Ариѳметика должна незамѣтно переходить въ алгебру и служить пропедевтикой къ алгебрѣ. Алгебра должна быть поставлена въ болѣе тѣсную связь съ геометріей...

Но здѣсь я забѣжалъ нѣсколько впередъ. Нужно еще установить взаимоотношеніе между ариѳметикой и геометріей, пропедевтикой геометріи. «Этотъ подготовительный курсъ,—говоритъ F. Klein,—теперь пожалуй введенъ во всѣхъ странахъ, даже и тамъ, гдѣ преподаваніе геометріи ведется по устарѣлому Эвклидовскому построенію». Къ сожалѣнію у насъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи нѣтъ пропедевтическаго курса геометріи, который въ Германіи существуетъ уже почти 30 лѣтъ (съ 1882 г.), а геометрію мы изучаемъ почти что по Эвклиду, т. е. дедуктивнымъ методомъ».

«Какъ опытъ показываетъ, я говорю только о Франціи, заявляетъ Э. Борель, «строгое» изложеніе элементовъ дѣйствуетъ запугивающимъ образомъ на учениковъ. Они не понимаютъ, почему доказываются и при томъ тяжеловѣсно такія положенія, которыя для нихъ и безъ того столь очевидны, и видятъ въ доказательствахъ только игру словъ.»—Это я говорю только о Франціи, заявляетъ Э. Борель и этимъ какъ бы хочетъ указать на интернаціональный характеръ этого явленія!

Дедуктивный методъ и недостатокъ развитія пространственнаго представленія у учениковъ являются главными камнями преткновенія въ началѣ изученія математики, а въ частности—геометріи.

«Уже очень часто,—говоритъ A. Höfler, поборникъ реформы—съ 1887 г., раздавалось требованіе преподавать алгебру и гео-

метрію въ низшихъ классахъ «эмпирически», «индуктивно»... И давно уже сознано, что апріорная, чисто дедуктивная математика для дѣтей 10—13 лѣтняго (I, II и III кл.) возраста вообще еще не существуетъ, что только на средней ступени можно и должно понемногу пробуждать потребность въ такомъ изложеніи».

F. Klein также выдвигаетъ «генетическій» методъ преподаванія вмѣсто господствующаго въ теченіи нѣсколькихъ десятилѣтій дедуктивнаго, и кромѣ того требуетъ развитія пространственнаго представленія построеніемъ и черченіемъ, логическій же элементъ не долженъ глохнуть, но пусть постепенно углубляется отъ класса къ классу сообразно развитію учениковъ.

Словомъ: «Zuerst die Anwendung, dann die Regel» (сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило) — общее положеніе A. Höfler'а для всякой школьной науки.

Теперь укажу на тѣ требованія со стороны реформаторовъ, которымъ долженъ удовлетворятъ математическій матеріалъ средней школы. Было время, когда математику изучали только потому, что она обѣщала непосредственную пользу въ практической жизни (17 и 18 вѣкъ). Затѣмъ (19 вѣкъ) математикѣ придавали только развивающее значеніе (формальное развитіе). «Но ни одностороннее формальное образованіе,—говоритъ F. Klein,—ни только утилитарное будетъ руководящимъ принципомъ въ преподаваніи математики, но правильное согласованіе обоихъ—идеалъ, къ которому нужно стремиться... То, что мы теперь преслѣдуемъ, есть, короче говоря, средняя линія тѣхъ двухъ крайностей, проведеніе въ жизнь одной которой-нибудь (изъ нихъ) является въ нашихъ глазахъ не современнымъ. Мы высоко цѣнимъ и признаемъ, продолжаетъ F. Klein, формально-развивающее значеніе математики, но въ тоже время желаемъ такого выбора учебнаго матеріала, изученіе котораго было бы полезнымъ для жизни. При этомъ здѣсь разумѣется польза не въ смыслѣ той пошлой утилитарности, отвергающей всякую мысль, которую нельзя сейчасъ же промѣнять на звонкую монету, но той чистой, которая обѣщаетъ широкіе горизонты всесторонняго образованія».

I. Изъ курса школьной математики исключить все, что, не развиваетъ «функціональнаго мышленія».

А именно: неопредѣл. уравненія, непрерывн. дроби, неравенства, теорію соединеній и биномъ Ньютона, дополнит. статьи изъ ариѳметики въ VIII кл.

II. Въ курсъ школьной математики включить то, что развиваетъ:

1) функціональное мышленіе

и 2) пространственное представленіе, а именно: начальную геометрію, аналитическую геометрію, пропедевтику тригонометріи и стереометріи, дифференцированіе и интегрированіе отдѣльныхъ функцій, а не теорію диф. и инт. исчисленія».

X. Содержаніе курса школьной математики съ точки зрѣнія современныхъ запросовъ жизни и пріемы для посильнаго выполненія школою этихъ требованій.

Докладъ пр.-доц. В. В. Лермантова (Спб.)

«Общее недовольство современнымъ состояніемъ школьнаго обученія какъ заграницею, такъ и у насъ, объясняется тѣмъ, что эволюція жизни вездѣ опередила эволюцію педагогики. Внушая своимъ ученикамъ изъ года въ годъ одни и тѣ же «предметы», педагоги невольно и незамѣтно для себя укрѣпляются въ поклоненіи своимъ «пещернымъ» и «площаднымъ идоламъ» Бэконовскимъ и не хотятъ знать новыхъ требованій жизни. «У насъ всегда такъ поступали» и «вездѣ такъ поступаютъ», постоянно можно слышать отъ заправителей школьнаго дѣла, когда жизнь требуетъ отъ нихъ измѣненій старыхъ порядковъ. А уступая, они невольно такъ ставятъ новое дѣло, что «все остается по старому», поклоненіе старымъ «идоламъ» продолжается въ новой жизни.

Какъ сложились современныя предвзятыя идеи педагогіи.

Эти предвзятыя идеи, столь удачно названныя «идолами» Бэкономъ Веруламскимъ, создались у педагоговъ въ давно-прошедшія времена. Намъ необходимо прослѣдить исторію ихъ образованія, чтобы выяснить современное положеніе дѣла и требованія, предъявляемыя современной школѣ обывателями.

О методахъ обученія и воспитанія юношества въ самыя древнія времена до насъ почти ничего не дошло, кромѣ отрывочныхъ указаній. Нѣсколько больше узнали антропологи въ послѣднее время о постановкѣ этого дѣла у многихъ современныхъ «дикихъ» и «варварскихъ» народовъ и, къ удивленію, оказалось, что это дѣло у нихъ поставлено было значительно цѣлесообразнѣе, чѣмъ у насъ, народовъ «культурныхъ», конечно, не абсолютно, а лишь относительно условій жизни этихъ народовъ.

Науку изучать у нихъ юношамъ не приходилось за полнымъ отсутствіемъ таковыхъ, нужно было лишь приготовляться къ профессіи гражданина своего племени. Необходимыя ремесленныя умѣнья и правила обхожденія съ другими людьми внушались въ семьѣ, главнымъ образомъ примѣромъ старшихъ съ помощью «жезла и палицы» родительской, по рецепту Іисуса, сына Сирахова. Путешественники привезли много странныхъ разсказовъ объ обрядахъ и истязаніяхъ, которымъ подвергаются подростки у многихъ дикихъ народовъ при возведеніи въ санъ взрослыхъ. Но при ближайшемъ изученіи обряды эти оказались высшимъ курсомъ воспитанія. Въ теченіи нѣсколькихъ дней юношамъ сообщались всѣ тайныя знанія ихъ племени и внушались правила поведенія. Въ то же время испытывалась ихъ способность переносить лишенія и страданія. Все это совершалось при таинственной обстановкѣ, способной внушить неприложность сообщенныхъ правилъ и необходимость держать сообщенныя свѣдѣнія въ глубокой тайнѣ; за нарушенія угрожали карою божествъ и въ сей и въ будущей жизни.

Цѣль достигалась хорошо: извѣстно, что многіе изъ этихъ народовъ, напримѣръ, краснокожіе индѣйцы Америки, отличаются большою корректностью въ своихъ взаимныхъ отношеніяхъ, а у многихъ африканскихъ народовъ уваженіе къ своему закону такъ велико, что тюремъ не существуетъ, и виновный добровольно подчиняется рѣшенію суда, напримѣръ, безъ предупрежденія отрабатываетъ заимодавцу неуплаченный долгъ, если судьи приговорятъ къ этому. Цивилизующіе европейцы только разрушили эти своеобразные порядки, не замѣнивъ ихъ лучшими.

Эти воспитательные пріемы, несмотря на свою кажущуюся дикость, были очень цѣлесообразны. Въ обыденныхъ случаяхъ жизненныхъ разсуждать некогда, рѣшеніе нужно немедленное, и человѣкъ не сомнѣвающійся, какъ ему поступить, будетъ обыкновенно имѣть больше шансовъ на успѣхъ, чѣмъ разсуждающій и медлящій. Очевидно также, что эти пріемы консервативны; въ этомъ ихъ сила и слабость, такъ какъ они легко обращаются въ «пережитокъ», неудовлетворяющій болѣе новымъ условіямъ жизни.

Однако эти воспитательныя системы первобытныхъ народовъ остались почти безъ вліянія на современную систему, знакомство съ ними намъ пригодится лишь для лучшей оцѣнки нашихъ пріемовъ, всецѣло основанныхъ на обычаяхъ классической Греціи. Мы и теперь еще слѣдуемъ рецепту обученія «свободнаго юноши греческаго», данному Аристотелемъ: «учи всему, что украшаетъ жизнь, избѣгая всего практическаго, ремесленнаго: это удѣлъ рабовъ и илотовъ». Какъ поясненіе приводится примѣръ: «учить играть на флейтѣ надо, но не слѣдуетъ доводить до виртуозной игры: это тоже удѣлъ рабовъ». Свободный юноша греческій давно прекратилъ свое существованіе, предметы, изученіе которыхъ было призвано украшать его жизнь, многократно замѣнялись другими, а педагоги съ постоянствомъ, достойнымъ лучшей доли, по прежнему старательно избѣгаютъ: «всего практическаго, ремесленнаго» и еще старательнѣе не доучиваютъ до степени «виртуозности», не замѣчая, что теперь учить имъ приходится уже «дѣтей рабовъ и илотовъ», желающихъ увеличить свою работоспособность при посредствѣ школы, очень мало заботясь объ «украшеніи жизни».

Многостолѣтній рецептъ Аристотелевъ соотвѣтствовалъ требованіямъ жизни: искусственному обученію подвергались только юноши изъ достаточныхъ и богатыхъ семействъ, науки еще не давали тогда никакихъ умѣній, примѣнимыхъ къ жизни, даже грамотность не была нужна для всѣхъ, своими знаніями можно было только блеснуть въ разговорѣ и отличаться отъ толпы. Учились по прежнему только для «украшенія жизни», а практическія знанія пріобрѣтались помимо школы «по преемству въ тайнѣ» отъ мастеровъ ихъ ученика-

ми. Грамотность, нужная духовенству и судейскимъ, тоже пріобрѣталась въ монастыряхъ и отъ старшихъ дѣятелей той же спеціальности. Только съ половины прошлаго столѣтія прогрессъ наукъ о природѣ сдѣлалъ нужнымъ для всѣхъ обывателей пріобрѣтеніе многихъ умѣній, основанныхъ на изученіи наукъ, которое можетъ дать лишь школа; съ этого времени и началось общее недовольство существующими системами обученія.

Современныя требованія жизни. Чего же теперь требуетъ обыватель отъ школы? Требованія эти разнообразны, ихъ вообще удачно охарактеризовалъ О. Лоджъ словами: «въ наше время надо обучать тому, что увеличиваетъ работоспособность обучаемыхъ». Но слова эти требуютъ многосторонняго поясненія. Знанія фактовъ науки остаются не примѣнимыми, если изъ нихъ не вытекаютъ соотвѣтственныя умѣнья. Такъ, Лоджъ приводитъ примѣръ, что изученіе ариѳметики начинаетъ приносить пользу лишь съ того момента, когда изучающій получитъ, по крайней мѣрѣ, возможность провѣрить итогъ лавочнаго счета. Нерѣдко преподаваніе ариѳметики ведется такъ, что даже послѣ двухъ—трехъ лѣтъ обученія ученикъ и этого сдѣлать не можетъ, хотя сдаетъ экзамены удовлетворительно: вся его учеба направлена была въ другую сторону и сообщенныя знанія оказались «стерилизованы».

Узнавъ законы многихъ «силъ природы», люди начали примѣнять ихъ, заставляя работать усиленно на свою пользу. Этимъ путемъ въ короткое время преобразовали весь строй жизни, благосостояніе людей возросло, но скоро передовые ученые замѣтили, что такъ дальше идти нельзя: быстро истощатся запасы, накопленные природою въ теченіи многихъ вѣковъ и тысячелѣтій, и людямъ станетъ жить хуже прежняго. Необходимо распространеніе болѣе основательныхъ знаній наукъ о природѣ, чтобы всякій обыватель зналъ мѣру въ эксплуатаціи ея богатствъ, только при этихъ условіяхъ процессъ людского благосостоянія можетъ оказаться устойчивымъ.

Такая степень знанія недоступна всѣмъ: возможно лишь сообщать выводы и заключенія, полученные въ такихъ случаяхъ учеными, и внушать при элементарномъ преподаваніи

необходимость слѣдовать этимъ указаніямъ. Для всѣхъ нужно и доступно лишь умѣнье примѣнять законы природы, а средствомъ для его пріобрѣтенія служитъ цѣлесообразное преподаваніе математики въ школахъ.

Умственное развитіе и умѣнье вычитывать свѣдѣнія изъ книгъ.

Дѣло въ томъ, что идеи Аристотеля у современныхъ педагоговъ приняли приблизительно такую форму: «учи основаніямъ всѣхъ наукъ и доводи до умѣнья разсуждать (называемаго «умственнымъ развитіемъ»). Тогда ученикъ будетъ въ состояніи премѣнить свои общія знанія ко всякому частному случаю, который ему встрѣтится въ жизни».

Идеалъ этотъ очень высокій, замѣнить его лучшими мы еще не можемъ, но онъ доступенъ въ полезной степени только немногимъ первостатейнымъ ученымъ, двигающимъ свою науку впередъ. Заурядные люди достигаютъ только такой «степени умственнаго развитія», что могутъ вести умные разговоры въ обществѣ и понимать газетныя статьи. Въ недавнемъ прошломъ другого пути для примѣненія результатовъ науки къ требованіямъ жизни и не существовало, отъ того-то это дѣло и оставалось доступнымъ лишь немногимъ ученымъ. И имъ самимъ нужно было затрачивать много времени и труда для рѣшенія каждаго такого вопроса.

Въ наше время накопилось множество уже рѣшенныхъ вопросовъ такого рода, они давно записаны въ систематическомъ порядкѣ въ разнаго рода справочныхъ книгахъ, и было бы безсмысленно рѣшать ихъ вновь, исключая, конечно, очень простые случаи, которые спеціалистъ рѣшаетъ не думавши, по памяти. Все сводится къ доступному многимъ умѣнью пользоваться главными справочными книгами и вычитывать нужныя свѣдѣнія изъ другихъ книгъ,—болѣе основательныхъ когда это становиться нужнымъ.

Для этой же цѣли и необходимо стало цѣлесообразное изученіе математики въ школахъ. Законы природы выражаютъ зависимость между обстоятельствами явленія; зависимость эту только въ простѣйшихъ случаяхъ можно выразить словами разговорнаго языка; въ болѣе сложныхъ случаяхъ только условный языкъ математики способенъ выразить эту зависимость столь опредѣленно, что становятся воз-

можными численныя предсказанія результатовъ соотвѣтственныхъ явленій. Вся сила науки въ такихъ предсказаніяхъ: въ обыденныхъ случаяхъ люди поступаютъ по рутинѣ и знаютъ, что выйдетъ изъ ихъ начинаній. Въ случаяхъ болѣе сложныхъ и новыхъ, для которыхъ подходящихъ «прецедентовъ» еще не было, остается вопрошать ученыхъ соотвѣтствующей спеціальности, и они могутъ вычислить предсказанія по методамъ своей науки. Въ наше время такія умѣнья для простѣйшихъ, безспорныхъ случаевъ стали необходимы и для заурядныхъ обывателей, не спеціалистовъ. Не сознавая еще вполнѣ ясно свои нужды, они инстинктивно начинаютъ отворачиваться отъ общеобразовательныхъ школъ стараго образца, работающихъ еще въ аристотелевскомъ духѣ, и ищутъ обученія, увеличивающаго ихъ жизненную работоспособность. Слишкомъ ясно обыватели начали чувствовать, что вся учеба общеобразовательныхъ заведеній для нихъ «ни къ чему», такъ какъ она стерилизована недосказываніемъ нужнаго и представляетъ только нѣчто вродѣ истязанія, выдержавшіе которое получаютъ въ награду права для занятія привиллегированнаго положенія въ обществѣ.

Значитъ, въ настоящее время, сверхъ навыка въ скоромъ и правильномъ счетѣ, необходимы каждому математическія знанія, пріучающія къ «функціональному мышленію», какъ выражаются нѣмцы. Надо изучать алгебру не только какъ «общую ариѳметику», а усвоить значеніе уравненія, какъ выраженія зависимости между двумя перемѣнными, графическій методъ и понятіе о производной, какъ о мѣрѣ быстроты прироста зависимой перемѣнной. Другими словами: надо замѣнить ненужныя никому части современнаго курса математики среднихъ училищъ начатками высшей математики, изложенными нѣсколько иначе, чѣмъ ихъ излагаетъ наука академическая.

Три главные разряда учениковъ, по ихъ способностямъ.

Но прежде чѣмъ подробнѣе разобрать этотъ вопросъ необходимо разсмотрѣть другую сторону дѣла: качества матеріала, подвергаемаго обученію въ нашихъ школахъ. Я былъ поставленъ въ особенно благопріятныя условія для такого рода наблюденій и поэтому могъ подмѣтить многое, ускользающее отъ вниманія настоящихъ учителей и профессоровъ; въ теченіи почти 50 лѣтъ

я наблюдалъ изъ-за кулисъ за тѣмъ, какъ только что выпущенные со школьной скамьи гимназисты примѣняли въ университетѣ свои математическія познанія къ вычисленію результатовъ собственныхъ физическихъ опытовъ. Такъ какъ я не былъ раздавателемъ благъ земныхъ, то этимъ юношамъ не было надобности стараться меня обмануть, какъ обманываютъ своихъ экзаменаторовъ, и я наблюдалъ ихъ познанія въ натуральномъ видѣ.

Главный выводъ получался тотъ, что величайшая ошибка нашей системы заключается въ стремленіи, научая «всѣхъ всему», довести всѣхъ ихъ до одного уровня познаній по всѣмъ предметамъ обученія. Это стремленіе само по себѣ совершенно логично: если благополучное окончаніе курса даетъ всѣмъ одинаковыя права, то и требованія должны быть для всѣхъ одинаковы. Не принято во вниманіе лишь то обстоятельство, что природныя способности учениковъ очень разнообразны, и что нѣтъ физической возможности довести всѣхъ до одинаково высокаго уровня знаній; стремленіе къ этому приводитъ лишь къ тому, что болѣе способные недоучиваются, а наибольшимъ успѣхомъ въ школѣ пользуются заурядные ученики съ отличной памятью и отсутствіемъ интереса къ какой-либо изъ преподаваемыхъ наукъ. Желая повысить уровень знаній, его понижаютъ, такъ какъ въ силу вещей приходится довольствоваться уровнемъ знаній, доступнымъ большинству.

Около двухъ третей, обучающихся въ университетахъ, принадлежитъ къ этому разряду «заурядныхъ» учениковъ. Многіе изъ нихъ показываютъ большой интересъ къ самому процессу ученія, вѣрнѣе къ добыванію хорошихъ отмѣтокъ и отличій, оставаясь въ то же время вполнѣ «свободными отъ науки». Они справляются о томъ, что обязательно, и никогда не сдѣлаютъ лишней работы для лучшаго усвоенія изучаемаго. Для нихъ важно лишь то, что стоитъ въ запискахъ и программахъ экзаменовъ, хотя бы это была явная опечатка. Такъ мнѣ достовѣрно извѣстно, какъ въ одномъ учебномъ заведеніи цѣлый классъ рапортовалъ профессору на экзаменѣ о «законѣ сивыхъ жилъ», потому что такъ онъ былъ названъ въ литографированныхъ запискахъ писцами по ошибкѣ или въ

шутку. Но дѣлать что либо по указанному, это «заурядные» выучиваются хорошо, только думать самостоятельно они никакъ не могутъ.

Изъ этого разряда выходятъ полезные общественные дѣятели, ими держатся установленные порядки во всѣхъ отрасляхъ жизненной дѣятельности, только въ главные распорядители такіе не годятся. Не годятся они и въ учителя юношества, особенно въ высшихъ школахъ: научить умѣнью самостоятельно изслѣдовать истину они не могутъ, потому что это дѣло имъ самимъ недоступно. Они даже не замѣчаютъ разницы между «первыми учениками» училищъ изъ разряда «заурядныхъ» и дѣйствительно талантливыми юношами, способными мыслить самостоятельно. Безсильными они оказываются и во всѣхъ случаяхъ, когда установившіеся пріемы оказываются не примѣнимыми къ новымъ обстоятельствамъ и необходимо принимать новыя мѣры. Зато во время своего ученія они обыкновенно становятся первыми учениками, потому что точно и ровно исполняютъ всѣ требованія своихъ учителей.

Способныхъ къ самостоятельному мышленію, прирожденныхъ изслѣдователей истины нарождается немного, едва ли 1% всего числа достигающихъ высшихъ школъ. Изъ этого числа большая часть не одарена значительной работоспособностью, частью по слабому здоровью, частью по нѣкоторой медленности мысли. Многіе изъ нихъ «тиходумы»: заботятся усиленно и продолжительно, они способны одолѣть большія трудности, вполнѣ овладѣть изучаемымъ предметомъ, но работа у нихъ идетъ такъ медленно, что они отстаютъ и не успѣваютъ использовать свои силы, пока не наступила старость. Изъ тысячъ пяти студентовъ, прошедшихъ на моихъ глазахъ чрезъ нашу физическую лабораторію съ 1865 года, я могу насчитать лишь трехъ, показавшихъ безъ сомнѣнія выдающуюся способность самостоятельнаго научнаго мышленія, да десятка два, оказавшихся болѣе или менѣе способными къ этому дѣлу. (Молодыхъ, еще не успѣвшихъ показать свои силы, я въ это число не включаю).

Замѣчательно, что граница между этими перворазрядными и лицами съ заурядными способностями довольно рѣзкая.

На моихъ глазахъ было не мало примѣровъ того, какъ ученики отлично сдававшіе экзамены, несмотря на свое желаніе, ничего не могли сдѣлать, когда принимались за самостоятельную научную работу. У тѣхъ же лицъ дѣло начинало идти снова отлично, когда они попадали на мѣста, гдѣ требовалась лишь добросовѣстная рутинная работа. Экзамены же сдаютъ отлично лишь очень сильные изъ перворазрядныхъ, потому только, что имъ это дается легко. Тѣ же, у которыхъ силъ поменьше, обыкновенно не могутъ принудить себя посвятить достаточно труда и времени на неизлюбленные предметы и отстаютъ отъ наиболѣе прилежныхъ заурядныхъ.

Ближе къ перворазряднымъ «паріи» нашихъ школъ — личности со способностями «ограниченными» одною узкою спеціальностью. По этой спеціальности они часто бываютъ близки къ геніальности, но отказываются понимать и изучать другіе отдѣлы «общихъ знаній». За это наши школы выбрасываютъ ихъ за бортъ въ самомъ началѣ курса, до высшихъ заведеній они рѣдко доходятъ. Но заграницей болѣе половины признанныхъ ученыхъ (конечно не первостепенныхъ), а также выдающихся передовыхъ техниковъ принадлежатъ къ разряду такихъ «ограниченныхъ». Успѣха они добились именно потому только, что сосредоточились каждый въ своей узкой сферѣ дѣятельности. Одинъ изучаетъ только жуковъ, другой только кинетическую теорію газовъ, а иной техникъ только изготовленіе одного продукта, поэтому каждый и можетъ изучить свое дѣло до тонкости и открыть новые факты, служащіе кирпичиками, изъ которыхъ созидается зданіе науки. Наша система требуетъ отъ такихъ непосильной работы, и поэтому общество теряетъ своихъ полезныхъ работниковъ-спеціалистовъ и принуждено выписывать ихъ изъ-заграницы.

Названіе «ограниченные» я заимствовалъ со словъ нашего знаменитаго математика Чебышева. Онъ былъ членомъ Парижской Академіи и часто ѣздилъ туда, чтобы поддерживать знакомства съ академиками. Въ послѣдніе годы своей долгой жизни Чебышевъ занимался исключительно разработкой частныхъ случаевъ найденной имъ общей формулы для выраженія движенія шарнирныхъ механизмовъ и придавалъ

такую важность этому предмету, что называлъ «ограниченными» всѣхъ, кто не интересовался этими вопросами. Я не разъ разспрашивалъ его о разныхъ академикахъ и всегда получалъ отвѣтъ: «такой-то? Это ограниченный человѣкъ». Случалось такъ, что эта характеристика всегда оказывалась вѣрна: я потому и разспрашивалъ, что по статьямъ этихъ ученыхъ было ясно: или что они не знали о другихъ работахъ по тому же вопросу или что не хотѣли познакомиться съ другими науками, къ нему касающимися. Однако такое самоограниченіе не помѣшало имъ сдѣлать свой посильный вкладъ въ сокровищницу науки; напротивъ того, этимъ обусловливалась всякая сила.

Особенно цѣнны такіе ограниченно—талантливые люди въ разныхъ отрасляхъ технической дѣятельности. Разностороннія знанія и способности нужны главнымъ руководителямъ дѣла, но они даже мѣшаютъ человѣку сосредоточиться надъ одною узкою спеціальностью. Но такой ограниченно-талантливый нерѣдко такъ хорошо изучилъ свой станокъ, свою печь или машину, что получаетъ необычные результаты, недоступные для другихъ, но обусловливающіе успѣхъ дѣла.

Пользуюсь случаемъ, чтобы напомнить объ одномъ весьма цѣнномъ качествѣ Чебышева какъ учителя, навѣрно ускользнувшемъ отъ его біографовъ. Изъ всѣхъ профессоровъ, у которыхъ я учился въ университетѣ въ 1863—7 годахъ, онъ одинъ былъ истиннымъ учителемъ математики. На первый взглядъ онъ казался даже смѣшонъ: размахивалъ руками, шепелявилъ, прихрамывалъ на одну ногу, а подъ старость поражалъ въ разговорѣ нерѣдко самомнѣніемъ, граничащимъ съ маніей величія, но при всемъ этомъ онъ одинъ не ограничивался сообщеніемъ голыхъ фактовъ математики, а выяснялъ ихъ значеніе. И дѣлалъ это въ такой формѣ, которая не всякому доступна, но сильно поднимала авторитетъ въ глазахъ слушателей. «Когда мы сидѣли съ Гермитомъ за кофе, въ кофейнѣ, въ Парижѣ, я говорю то-то, а онъ на это: 'то-то, но, мы тутъ же эту формулу и вывели». Изъ того, что они говорили, выяснялось значеніе формулы въ наукѣ.

Въ начальныхъ и среднеучебныхъ заведеніяхъ процентное отношеніе учениковъ этихъ трехъ разрядовъ способностей

должно быть нѣсколько иное, многіе перворязрядные не доходятъ до конца ученія, поэтому вначалѣ ихъ должно быть больше, но еще больше ограниченныхъ и даже вовсе не способныхъ къ ученію. Поэтому можно ожидать въ начальныхъ училищахъ уменьшенія процентнаго отношенія заурядныхъ учениковъ къ общему числу учащихся. Отъ этого-то поощренія заурядныхъ у насъ и оказывается недостатокъ въ талантливыхъ общественныхъ дѣятеляхъ.

Примѣнимая математика, съ которой нужно теперь начинать ея преподаваніе. Если принять за истину такого рода раздѣленіе учащихся по степенямъ ихъ способностей и необходимость научать въ школахъ умѣнью правильно пользоваться знаніемъ законовъ природы, то постановка преподаванія математики, отвѣчающая требованіямъ жизни, опредѣляется сама собою. Мы еще не имѣемъ средствъ опредѣлять степень способности дѣтей по признакамъ, подлежащимъ измѣренію; пока экспериментальная психологія такихъ пріемовъ не выработаетъ, приходится начать учить всѣхъ одинаково и судить по результатамъ. Начало обученія математикѣ поставлено у насъ вообще удовлетворительно: дѣти довольно скоро выучиваются считать и производить четыре ариѳметическія дѣйствія въ умѣ и на письмѣ. Пререканія продолжаются лишь о выборѣ метода, ведущаго быстрѣе къ цѣли, достигаемой и другими употребительными пріемами. Ариѳметику, такимъ образомъ, нужно доводить до изученія дѣйствій надъ употребительными именованными числами, тройного правила и понятія о дробяхъ. Дѣйствія съ десятичными дробями слѣдуетъ вести одновременно съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами, указавъ, что цифра налѣво отъ мѣста единицъ обозначаетъ десятки, а направо десятыя части. При такой постановкѣ трудностей ученія о десятичныхъ дробяхъ не будетъ вовсе. Все остальное изъ ариѳметики слѣдуетъ сначала отбросить какъ ненужный пережитокъ старины и прямо перейти къ алгебрѣ. Начатки алгебры, если ихъ излагать, не мудрствуя лукаво, какъ средство для рѣшенія задачъ, доступнѣе дѣтямъ, чѣмъ сложныя ариѳметическія «правила», превращенія періодическихъ дробей въ обыкновенныя и дѣйствія надъ этими дробями, весьма рѣдко примѣняемыя при нужныхъ для дѣла вычисленіяхъ.

Не надо забывать, что дѣти мыслятъ образно и становятся способными къ отвлеченному мышленію лишь годамъ къ 14, когда ученіе въ начальныхъ школахъ уже кончено. Поэтому о сообщеніи «математическаго развитія» не можетъ быть и рѣчи даже въ городскихъ училищахъ. Цѣлью обученія математикѣ можетъ быть только наученіе умѣнью дѣлать разсчеты, нужные для обыденной жизни. Посильное математическое развитіе до 14-лѣтняго возраста могутъ получить лишь немногіе, особенно одаренные ученики. Ихъ учителя должны стараться отличать и дать имъ указанія и помощь для лучшаго внѣкласснаго изученія этого предмета.

Обывателямъ нужно умѣнье дѣлать слѣдующаго рода разсчеты.

1. Всякому нужно умѣнье подводить итоги высокихъ столбцевъ счетной книги. Какъ не смѣшно такое утвержденіе, но я убѣдился, что наша школа этому искусству не выучиваетъ. Я много лѣтъ состоялъ казначеемъ одного ученаго общества, ежегодно производилась ревизія счетной книги, и въ число ревизоровъ обыкновенно попадали учителя математики; однако и у нихъ итоги столбцевъ немногихъ страницъ рѣдко получались сразу, безъ пререканій.

2. Приходится не рѣдко вычислять проценты по своимъ долговымъ и процентнымъ бумагамъ.

3. Нерѣдко требуется подсчитывать стоимость проѣзда или провоза, на основаніи данныхъ соотвѣтственныхъ таблицъ.

Болѣе хитрыя вычисленія и разсчеты нужны бываютъ лишь профессіоналамъ, а именно:

4. Разные разсчеты коммерческой и банковой ариѳметики. Разсчеты эти большею частью немудрые, но дѣлаются сообразно обычаямъ, остающимся тайною для учениковъ общеобразовательныхъ школъ.

5. Разсчеты стоимости работъ, по даннымъ «урочнаго положенія» и подобныхъ ему справочныхъ книгъ. Въ нихъ дается количество матеріала и рабочихъ дней на единицу работы, напримѣръ на 1 кв. саж. паркетнаго пола. Вычисленія сводятся къ умноженіямъ и сложеніямъ.

6. Наконецъ, разсчеты при составленіи разнаго рода проэктовъ съ помощью справочныхъ книгъ. Въ нихъ даются алгебраическія формулы, въ которыя надо подставлять численныя значенія, сооотвѣтствующія данному случаю. Для пониманія этихъ справочныхъ книгъ необходимы спеціальныя техническія знанія, но пріемы вычисленій очень просты: надо лишь знать обычныя обозначенія алгебры. Нерѣдко формулы этихъ книгъ содержатъ и дифференціалы и интегралы, но это лишь для сокращенія рѣчи: подставлять числа приходится всегда въ правую, конечную часть формулы, по правиламъ начальной алгебры, а высшая математика послужила ученымъ для вывода этихъ формулъ, предлагаемыхъ для пользованія уже въ готовомъ видѣ. Въ этихъ-то случаяхъ и нужно бываетъ знакомство съ геометріей, тригонометріей и умѣнье пользоваться таблицами логариѳмовъ и счетною линейкою; не лишнее и знакомство съ высшею математикою. Какъ видно, эти разсчеты, нужные для разныхъ случаевъ жизни, весьма мало похожи на тѣ упражненія и задачи, которыя теперь приходится ученикамъ рѣшать въ классѣ «для учителя математики».

Книги, изложенныя въ новомъ духѣ

Чтобы преподавать по новому, нужны новые учебники. Англичане уже давно начали составлять такіе, по иниціативѣ Пр. I. Perry, который въ 1901 году положилъ основаніе новой такого рода системы преподаванія элементарной математики своею рѣчью на собраніи «Британской Ассоціаціи». Его взгляды и «силлабусъ» курса математики изложены въ «Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики»*), а изложеніе начатковъ Высшей Математики, подъ заглавіемъ: „Вычисленія для Инженеровъ", переведено на русскій языкъ. Эта книга неудобна для русскихъ читателей, потому что порядокъ изложенія приспособленъ для надобностей изучающихъ «Практическую Механику» того же автора и кажется экономическимъ для читателя, незнакомаго съ этой второй книгой, но содержитъ очень много оригинальнаго, очень простое, доступное всякому изложеніе начатковъ анализа безконечно-малыхъ и много удобныхъ пріемовъ вычисленія, пренебрегаемыхъ соста-

---

*) XXVIII семестръ 1902 г. и XXIX, 1903.

вителями «академическихъ» курсовъ. На русскомъ языкѣ, насколько мнѣ извѣстно, только мои: «Примѣнимая алгебра» и «Математика для нематематиковъ», составлены въ такомъ духѣ. Попытки изложенія въ такомъ же духѣ у французовъ и нѣмцевъ пока сводятся къ старому: содержаніе указывается, но методы и направленіе изложенія мало отличаются отъ обычныхъ.

Какъ вести преподаваніе математики, чтобы поднять уровень математическихъ знаній въ школахъ.

Изложенный въ такомъ духѣ курсъ математики будетъ удовлетворять лишь «заурядныхъ» учениковъ. Если имъ однимъ ограничиться, то скоро у насъ «математики переведутся». Чтобы этого не случилось, необходимо радикально измѣнить учебные порядки. Понизивъ, такимъ образомъ, общія требованія до уровня доступнаго почти всѣмъ ученикамъ, надо повысить его для однихъ способныхъ къ математикѣ. Это нельзя сдѣлать, не увеличивъ нѣсколько трудъ учителей, но лишнихъ уроковъ почти не потребуется: учителю придется лишь указывать лучшимъ ученикамъ, желающимъ основательнѣе изучать математику и заслужить «отличіе» при переходѣ изъ класса въ классъ, книги и статьи для внѣкласснаго изученія. При этомъ придется удѣлить нѣсколько часовъ въ годъ на бесѣды съ этими учениками для объясненія ихъ сомнѣній и контроля пріобрѣтенныхъ ими познаній.

Такое изученіе серіознаго предмета по книгѣ будетъ само по себѣ чрезвычайно полезнымъ упражненіемъ для болѣе способныхъ учениковъ. Выше уже было указано, что умѣнье вычитывать изъ книгъ нужныя знанія замѣняетъ въ наше время для обыденныхъ случаевъ «умственное развитіе», котораго однако добивались безуспѣшно учителя въ старину. Въ младшихъ классахъ, гдѣ ученики моложе лѣтъ четырнадцати, конечно, этотъ методъ можно примѣнить лишь очень умѣренно и осторожно, только къ самымъ способнымъ ученикамъ; вполнѣ примѣнимымъ онъ становится лишь въ старшихъ классахъ.

Неумѣнье „вычитывать изъ книгъ нужныя свѣдѣнія“ у насъ поразительное: этому искусству нигдѣ не учатъ. „Паинька-гимназистъ“ прочтетъ всякую книгу отъ начала до конца, «не пай» начнетъ съ конца и прочитаетъ не въ по-

рядкѣ, по случайно выбраннымъ клочкамъ, а просмотрѣть книгу, найти, прочитать и даже изучить лишь то, что стало нужнымъ, никто не умѣетъ. Мало того, не научившись этому искусству въ школахъ, наши спеціалисты-практики не слѣдятъ за текущей литературой своего предмета по непривычкѣ къ этому и, достигнувъ до степеней высокихъ, оказываются отсталыми, неспособными больше основательно судить о новшествахъ. Поэтому такое дополнительное ученье для однихъ способныхъ къ математикѣ, будетъ имъ чрезвычайно полезно.—Понятно, что такой же пріемъ необходимо примѣнять и къ оказывающимъ способности и желаніе больше учиться по другимъ предметамъ курса.

Такой пріемъ лишь немного принесетъ пользы, если ограничиться имъ однимъ. Необходимо придать школьному ученью возможно большую степень индивидуальности въ противоположность современному стремленію привести всѣхъ къ одному уровню знаній, который въ силу вещей можетъ быть лишь довольно низкій, такъ какъ онъ долженъ быть доступенъ для большинства. Люди родятся весьма съ неровными способностями къ ученію и къ исполненію своей житейской работы. Доступнымъ идеаломъ общественнаго образованія можетъ быть только стремленіе довести всякаго до доступной ему степени обученія и добровольно выпустить съ честью каждаго для начала своей жизненной дѣятельности, какъ только дальнѣйшее ученіе окажется ему непосильнымъ. При такихъ порядкахъ будетъ меньше считающихъ себя обиженными судьбою: продолженіе ученья дало бы имъ права на лучшее положеніе въ обществѣ, но они сами не пожелали, чувствуя, что это имъ не подъ силу.—Напомню, что такая система практикуется въ Китаѣ со временъ Конфуція, ею государство это продержалось тысячу лѣтъ, несмотря даже на то, что предметы обученія давно стали пережиткомъ старины.

Постановка экзаменовъ. Итакъ, чтобы удовлетворять требованіямъ обывателей, школа должна быть одной, но ученіе должно быть вовсе не одинаково для всѣхъ: для перевода въ слѣдующій классъ каждый долженъ показать, что пріобрѣлъ минимальное количество умѣній, соотвѣтствующихъ пройденному курсу. Но поощрять продолжать ученіе надо

лишь тѣхъ, кто показалъ хотя бы по одному предмету знанія большія, выдержалъ испытаніе съ «отличіемъ». Другимъ надо предоставлять возможность оставить ученіе «съ честью» на многихъ ступеняхъ обученія, но не принуждать къ этому, потому что очень многія дѣти развиваются позднѣе большинства; это даже считается признакомъ высшей расы. Такъ въ Америкѣ негритянскіе мальчики опережаютъ бѣлыхъ въ начальныхъ школахъ, но скоро ихъ успѣхи и дальнѣйшее развитіе останавливается, тогда какъ бѣлые идутъ дальше.

При такой системѣ школьное обученіе получитъ характеръ системы созидающей, а не разрушающей строй жизни: поощряться оставлять профессію и высокое общественное положеніе своихъ отцовъ и дѣдовъ будутъ лишь тѣ, которые покажутъ въ школѣ свои выдающіяся способности къ дѣятельности, требующей большого напряженія умственныхъ силъ. Болѣе слабые будутъ раньше приступать къ жизненной дѣятельности, не теряя лишнее время въ школѣ, и будутъ сознавать, что идти дальше и подняться выше имъ не подъ силу.

Современная школа была создана для приготовленія образованныхъ слугъ государства—чиновниковъ, и дѣйствовала цѣлесообразно до пятидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, когда обнаружилось впервые перепроизводство. Къ этому времени представленіе о неразрывной связи окончанія курса въ какомъ-либо училищѣ съ пріобрѣтеніемъ правъ на болѣе высокое общественное положеніе такъ вкоренилось въ сознаніи обывателей и администраторовъ, что несмотря на всѣ преобразованія, школа оказалась лишь средствомъ «выйти въ люди». Даже кончающіе хорошо деревенскую начальную школу чувствуютъ себя въ деревнѣ не по себѣ и стремятся на болѣе легкіе городскіе хлѣба, вмѣсто того, чтобы стараться своими знаніями улучшать обстановку своей родной деревни. Это стремленіе прошедшихъ современную школу «прекращать собственное существованіе» и стремитъся перейти въ болѣе привиллегированное положеніе замѣчается не только у насъ, но и во Франціи и другихъ европейскихъ странахъ. Оно ведетъ къ улучшенію общественнаго строя только въ томъ случаѣ, когда подвигаются впередъ одни сильные, обладающіе

работоспособностью соотвѣтствующею новому положенію. Но дальше это осуществляется лишь въ немногихъ случаяхъ, и большинство умножаетъ лишь непроизводительный и несчастный «интеллигентный пролетаріатъ».

Въ этомъ-то отношеніи воспитательныя системы первобытныхъ народовъ и оказываются цѣлесообразнѣе современныхъ.

Пріемы, допускающіе нѣкоторую степень индивидуализаціи обученія въ школѣ.

Недостаточно сказать, что необходимо индивидуализировать школьное преподаваніе, необходимо указать пріемы, позволяющіе этого достигнуть. Вѣдь, общественное обученіе многихъ одновременно этимъ самымъ какъ-бы исключаетъ всякую возможность приспособляться къ особенностямъ каждаго ученика. Это вполнѣ вѣрно, но при всемъ своемъ разнообразіи способности учениковъ позволяютъ раздѣлять ихъ на три главныхъ разряда, а приспособлять обученіе только къ этимъ разрядамъ вполнѣ возможно. Главное средство уже указано выше: цѣлью обученія надо ставить пріобрѣтеніе умѣній, вытекающихъ изъ преподаванія. Надо установить, какія умѣнія составляютъ цѣль ученія въ каждомъ классѣ, и для перевода въ слѣдующій испытывать каждаго въ этомъ направленіи. Такое испытаніе не требуетъ спеціальной подготовки отъ учениковъ и поэтому для нихъ необременительно. Если ученикъ, исполнивъ работу, можетъ дать отчетъ, почему онъ дѣлаетъ такъ, а не иначе, надо считать, что онъ прошелъ «съ отличіемъ». Другіе предметы, какъ исторія и географія, состоятъ больше изъ фактовъ для запоминанія; хорошее запоминаніе этихъ фактовъ тоже надо считать отличіемъ, но второго разряда. Наивысшимъ отличіемъ надо считать занятія по нѣкоторымъ предметамъ сверхъ обязательнаго для всѣхъ уровня и доказательства успѣшности этихъ занятій.

Проведеніе такихъ порядковъ увеличитъ трудъ учителей. Для его облегченія и увеличенія производительности труда учениковъ необходимо привлечь на помощь самыхъ сильныхъ учениковъ, на подобіе семинарскихъ «авдиторовъ» стараго времени и «Ланкастерскихъ школъ взаимнаго обученія», но не впадая въ ошибки этихъ давно брошенныхъ методовъ. Когда ученикъ «отстаетъ», родители берутъ ему репетито-

ра и почти всегда ученикъ «поправляется». Отчего не ввести это въ систему? Учителю нужна лишь небольшая часть времени, чтобы пройти курсъ, бо́льшая часть уходитъ на «спрашиваніе» и упражненія, особенно въ младшихъ классахъ. Отчего бы не завести такіе порядки: по утрамъ учитель идетъ впередъ: разсказываетъ новое и бѣглыми разспросами лучшихъ учениковъ удостовѣряется, что они поняли. Послѣ-обѣденные часы посвящаются репетиціямъ: тотъ же учитель спрашиваетъ, не надо ли повторить что-либо изъ послѣдняго урока, задаетъ классныя упражненія и поручаетъ лучшимъ ученикамъ помогать слабѣйшимъ, пока и они не достигнутъ посильнаго знанія. Право помогать такимъ образомъ слабымъ товарищамъ должно считаться за отличіе. Учениковъ, достаточно понимающихъ, но слабыхъ здоровьемъ, можно отпускать на время ненужныхъ имъ репетицій домой или давать имъ заниматься въ это же время въ училищѣ дополнительнымъ изученіемъ излюбленныхъ предметовъ. Въ помощь учителю достаточно будетъ немногихъ лучшихъ учениковъ на каждый репетиціонный урокъ, остальныхъ можно будетъ освобождать поочереди для дополнительныхъ занятій. Точно такъ же можно будетъ вести репетиціи не со всѣми учениками класса заразъ, а повторять ихъ съ немногими, отпуская на это время другихъ. Лишнее время, проведенное въ классѣ, приноситъ только вредъ. Какая польза хорошему ученику сидѣть въ классѣ, пока дурные, отвѣчая урокъ, стараются обмануть учителя? Только лѣнтяи, не занимающіеся дома, при этомъ слушаютъ и кое-что запоминаютъ, не упуская изъ вида подмѣчать любимые учителемъ пріемы отвѣтовъ.

На репетиціяхъ такого рода учитель никакихъ отмѣтокъ не ставитъ, поэтому онъ является не врагомъ, а другомъ учениковъ, помогающимъ ихъ работѣ, а не карающимъ неуспѣхи. Еще лучшія отношенія установятся къ ученикамъ-репетиторамъ, а они сами не только лучше изучатъ предметъ, но пріучатся дѣлать добросовѣстно принятое на себя общественное дѣло. Вѣдь товарищи не спустятъ отлыниванія или только формальнаго исполненія такихъ полезныхъ для нихъ обязанностей. Не только не будетъ вполнѣ неуспѣшныхъ, но

выработается методъ воспитанія добросовѣстныхъ исполнителей своихъ гражданскихъ обязанностей.

Не лишнее и завести дежурства по классу для завѣдыванія завтраками въ складчину, продажей пособій и учебниковъ, чтобы съ дѣтства ученики пріучались бережно относиться къ общественнымъ суммамъ. Все это не трудно контролировать и давать распоряжаться лишь ничтожными суммами заразъ, а товарищескій контроль будетъ еще строже и окажетъ важное воспитательное вліяніе.

Не дурно было-бы предоставлять дежурнымъ ученикамъ и убирать самимъ классную комнату послѣ занятій, особенно въ школахъ для достаточныхъ учениковъ, чтобы отучать отъ мысли, что физическая работа унизительная. Но это уже лежитъ за предѣломъ обсужденія нашего Съѣзда.

Резюме доклада и заключеніе. Итакъ, съ точки зрѣнія запросовъ современной жизни курсъ школьной математики слѣдуетъ начинать съ сообщенія умѣнья дѣлать нужные расчеты при помощи начальныхъ пріемовъ ариѳметики, алгебры, графическаго метода и логариѳмовъ. Для этого, отбросивъ ненужныя, трудныя части ариѳметики, слѣдуетъ сообщать основы алгебры, геометріи и тригонометріи, включая даже начатки анализа безконечно малыхъ, излагая все въ духѣ «функціональнаго мышленія».

Изложеніе математическихъ ученій въ духѣ «академическомъ» слѣдуетъ начинать не ранѣе 14 лѣтняго возраста, такъ какъ раньше большинство учениковъ можетъ лишь запомнить и повторить слова учителя, а къ «математическому развитію» еще неспособно. И въ старшихъ классахъ знаніе ученій математики—академической надо требовать не отъ всѣхъ, а только въ видѣ «отличія», прощая ихъ незнаніе ученикамъ, показывавшимъ отличіе въ другихъ предметахъ.

Для достиженія лучшихъ результатовъ обученія слѣдуетъ требовать отъ всѣхъ только умѣній, для пріобрѣтенія которыхъ предназначено изученіе предметовъ программы каждаго класса, а знанія «академическаго характера» изъ пройденныхъ считать за отличіе.

Въ помощь учителю слѣдуетъ привлекать лучшихъ учениковъ класса въ качествѣ репетиторовъ. Эта мѣра не толь-

ко можетъ довести до минимума число неуспѣшныхъ, но обѣщаетъ школѣ огромное воспитательное значеніе, не говоря уже о поднятіи уровня знаній самихъ учениковъ-репетиторовъ.

Такая постановка математики въ начальной школѣ покажется преподавателямъ математики какой-то профанаціей науки. А я скажу, что профанируютъ свою науку они, а не проводящіе новую систему. «Насильно милъ не будешь», говоритъ пословица, большинство учениковъ ни мало не жаждетъ проникнуть въ тайны математики, это желаніе—удѣлъ немногихъ, прирожденныхъ математиковъ, способныхъ созерцать красоту «изящныхъ формулъ». Я хорошо помню, какъ смѣшно было намъ въ гимназіи слышать, какъ однажды учитель назвалъ «изящною» выведенную имъ передъ классомъ формулу; только къ концу университетскаго курса мы почувствовали правильность такого эпитета.

А учиться дѣлать разсчеты, которые будутъ нужны въ жизненной практикѣ, всякій не лѣнтяй будетъ охотно. По этому преподавать истины математики—академической, давлеющей сама себѣ, дѣтямъ, моложе лѣтъ четырнадцати, значитъ профанировать науку, «метать бисеръ свой передъ свиньями».

Во время засѣданія была получена изъ Москвы отъ проф. Б. К. Млодзѣевскаго слѣдующая телеграмма:

«Приношу глубокую благодарность за честь, оказанную мнѣ избраніемъ, и за сердечное привѣтствіе и приглашеніе. Крайнѣ жалѣю, что нездоровье не позволяетъ прибыть на Съѣздъ. Горячо желаю, чтобы Съѣздъ былъ началомъ общей дружной работы преподавателей математики на пользу дорогого всѣмъ намъ дѣла обновленія нашей школы». *Б. К. Млодзѣевскій.*

Пренія по докладамъ В. В. Лермантова и А. Г. Пичугина.

Д. М. Левитусъ (Спб.) „Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Два послѣднихъ доклада о содержаніи курса школьной математики затронули цѣлый рядъ вопросовъ о томъ, какія ея части нужны и какія излишни. Мнѣ кажется, вопросъ о томъ, что́ нужно выкинуть изъ программы, что́ вставить въ нее, рѣшить

нужно, но не въ сегодняшнемъ многочисленномъ собраніи. Для этого дѣла нужна особая комиссія, которая явилась бы дѣйствительнымъ выразителемъ мнѣній Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики, и отъ Съѣзда будетъ зависѣть, чтобы такая комиссія создалась. Сегодня намъ важно другое! Намъ нужно установить въ общихъ чертахъ, каково должно быть содержаніе школьнаго курса математики. Оставлять все по старому нельзя: жизнь не ждетъ, и плохо придется намъ, если наша школа не удовлетворитъ быстро растущихъ запросовъ жизни. Насъ, учителей математики, не мало, насъ тысячи. Неужели же мы, сознавая свой долгъ передъ нашей совѣстью, не двинемся впередъ, несмотря на холодный вѣтеръ, порывъ котораго становился иногда черезъчуръ рѣзкимъ? Бояться этого вѣтра въ настоящее время не нужно: это не настоящій вѣтеръ, это дыханіе, оздоровляющее культуру, которая должна охватить и нашу школу для того, чтобы мы могли двинуться впередъ и перестроить фактически современный курсъ математики".

Н. А. Извольскій (Москва). „Я буду говорить по основному вопросу, выдвинутому А. Г. Пичугинымъ, по вопросу объ измѣненіи программъ въ нашей школѣ. Является желаніе обновить наши программы такъ, чтобы на первый планъ была выдвинута идея функціональности—прибавить въ программу изученіе функцій и ввести графическій методъ. Я долженъ сказать, что это мнѣніе получило широкое распространеніе, и вотъ какіе доводы за это: во-первыхъ, идея функціи обнимаетъ собою весь курсъ дальнѣйшей математики; во-вторыхъ, таково авторитетное мнѣніе людей науки; въ третьихъ, указываютъ на то, что такъ дѣлается у нашихъ западныхъ сосѣдей. Что касается доводовъ послѣдней категоріи, то съ моей точки зрѣнія они не должны имѣть мѣста; мы не должны слѣпо слѣдовать авторитетамъ, но наоборотъ, должны относиться къ нимъ критически; въ этомъ заключается воспитательная сторона математики".

„Что касается отрицательныхъ сторонъ этого нововведенія, то эти стороны таковы: во-первыхъ, введеніе изслѣдованія функцій $y = ax + b$ и $y = ax^2 + bx + c$ является какъ бы оторваннымъ отъ общаго направленія курса 5-го и 6-го класса, куда хотятъ это ввести, и которое заключается въ томъ, чтобы учащіеся выработали извѣстные навыки. Если бы мы ограничились только изслѣдованіями этихъ двухъ функцій, то можетъ быть и для насъ самихъ было бы это неинтересно. Другое дѣло, если бы этотъ вопросъ расширили и стали бы изучать алгебраическія функціи на задачахъ, рѣшаемыхъ графиками. Можетъ быть, я ошибаюсь, но повидимому, это легко и интересно; такъ напр., у Лезана есть опре-

дѣленнаго рода задачи, которыя рѣшаются графиками. Но правда ли, что онѣ такъ интересны, что графическій способъ удобнѣе къ нимъ примѣнить? Если дадите одинъ видъ задачъ, то онъ несомнѣнно интересенъ и способенъ заинтересовать учениковъ на болѣе длинный или короткій промежутокъ времени, — это задачи объ измѣненіи температуры наружной или комнатной въ зависимости отъ времени года или у больныхъ; но другія задачи, которыя постоянно выдвигаются и находятъ мѣсто въ нашихъ учебникахъ, напр., задачи о желѣзнодорожныхъ графикахъ, по моему, не только учащимся, но и никому не интересны, (напр., на какихъ станціяхъ встрѣчаются всѣ поѣзда, выходящіе изъ Петербурга,съ поѣздами выходящими изъ Москвы?) Я думаю, что эти задачи были бы интересны для желѣзнодорожныхъ дѣятелей. Есть у Лезана видъ головоломныхъ задачъ — о собакахъ, бѣгущихъ навстрѣчу одна другой, о велосипедахъ; на нѣкоторыя изъ нихъ и надо смотрѣть, какъ на задачи головоломныя; онѣ рѣшаются графическимъ методомъ, а нѣкоторыя при помощи простыхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Не скрою, что и я хотѣлъ бы, чтобы аналитическая геометрія, хотя бы въ видѣ графиковъ, была введена въ курсъ среднихъ школъ. Привлекательныя стороны этого нововведенія заключаются въ пользѣ метода координатъ и для самой математики. и для близкихъ ей наукъ—космографіи, геометріи и проч. Повидимому, безъ прибавленія времени нельзя прибавлять къ обычнымъ программамъ требуемыя статьи“.

В. Ѳ. Каганъ (Одесса). „Я хочу сказать о реформѣ курса всякаго, какъ низшаго, такъ и средняго учебнаго заведенія. Можно, конечно, при этомъ столкнуться со словомъ, которое было такъ крылато сказано на этомъ собраніи, которое громко звучитъ уже 10 лѣтъ, это слово «реформа». Представители реформы, сторонники реформаторскаго теченія съ твердо-опредѣленной тенденціей нѣсколько разъ выступали здѣсь передъ нами и выражали желаніе, чтобы мы поддержали то теченіе, которое идетъ главнымъ образомъ изъ Германіи. Организаціонный Комитетъ въ свое время оказалъ мнѣ честь, предложивъ мнѣ составить докладъ о содержаніи курса школьной математики. Я воздержался отъ того, чтобы это сдѣлать, потому что у меня на этотъ счетъ больше сомнѣній, чѣмъ убѣжденій, и въ данный моментъ я хочу воспользоваться тѣми нѣсколькими минутами, которыми я располагаю, для того, чтобы нѣкоторыя изъ этихъ сомнѣній здѣсь вамъ изложить“.

„Я очень тщательно изучилъ вопросъ о реформѣ въ его обширной литературѣ. Какъ я уже сказалъ, этотъ вопросъ имѣетъ за собой десятилѣтнюю исторію. Его литература обширна, но состоитъ главнымъ образомъ изъ журнальныхъ статей, которыя изложены съ различныхъ точекъ зрѣній, такъ какъ всегда въ журнальныхъ статьяхъ

разсматривается вопросъ въ общихъ чертахъ и намѣчаются чаянія и вожделѣнія. Если же говорить о реформѣ, то нужно дать общія разъясненія, опредѣленныя указанія, а также и то, что нужно включить въ курсъ математики. Поэтому естественно было бы желать, чтобы намъ дали дѣйствительно опредѣленный матеріалъ".

„Что можетъ служить такимъ опредѣленнымъ матеріаломъ? На мой взглядъ—учебникъ. Попытки создать такой учебникъ, если не прошедшій уже черезъ школу, то, во всякомъ случаѣ, проектъ такого учебника,—дѣлали новые реформисты. Если посмотрите на эти учебники, то увидите, что они очень кратки, удивитесь тому, какъ ихъ мало. Даже Лицманъ въ отчетѣ, опубликованномъ въ международной комиссіи, указываетъ на очень немногіе. Изъ нихъ болѣе серьезные находимъ въ Германской литературѣ, какъ напр., Берендсонъ—Гётингъ. Клейнъ, говоря объ этой книгѣ, съ горечью замѣчаетъ, что главная идея о функціи слабо намѣчена, что этой идеѣ тамъ и сямъ удѣлено лишь немного мѣста. Клейнъ говоритъ, что французы счастливѣе нѣмцевъ, что у нихъ реформа уже проведена и есть учебники, и онъ указываетъ на одно такое руководство, на книгу Бореля. Эту книгу мы издали на русскомъ языкѣ подъ моей редакціей. Книга была, конечно, замѣчена, и мнѣ пришлось выслушать и прочитать не мало отзывовъ и замѣчаній. Позвольте подѣлиться нѣкоторыми замѣчаніями, какъ редактору выпущенной книги. Я былъ бы радъ указать вамъ хвалебные отзывы. Къ сожалѣнію, я долженъ не скрыть отъ васъ, что въ большинствѣ случаевъ я слышалъ упреки. Въ журналѣ Министерства Н. П. появилась рецензія Кояловича, въ которой многое въ этой книгѣ осуждалось. Я былъ бы очень счастливъ, если бы могъ сказать, что эти возраженія несправедливы; но нѣтъ, я долженъ сказать, что Кояловичъ правильно указываетъ: нужно удивляться, что такой математикъ, какъ Борель, написалъ такую слабую статью о логариѳмахъ. Мой добрый другъ С. И. Шохоръ-Троцкій мнѣ писалъ: «Веніаминъ Федоровичъ, книга меня не удовлетворяетъ и очень не удовлетворяетъ». А. А. Марковъ мнѣ писалъ: «Я былъ сторонникъ, если не рѣшительный сторонникъ реформы, то, во всякомъ случаѣ, стоялъ къ ней ближе, чѣмъ теперь, но если будетъ реформа такъ проведена, какъ представляетъ ее книга Бореля, то, извините, я буду противъ реформы".

„Я нарочно назвалъ нѣсколько лицъ, совершенно различныхъ по своему образу мыслей, по своему положенію, по своимъ отношеніямъ къ математическимъ вопросамъ, чтобы показать вамъ, что здѣсь не пристрастныя мнѣнія, что въ книгѣ есть что-то, что не удовлетворяетъ многихъ. Марковъ говоритъ, что въ книгѣ выброшена математика и сохранено только приложеніе. Я не скажу вамъ, что книга дурная: если бы она была плоха, то я не

взялся бы ее редактировать; но скажу, что съ этими указаніями необходимо считаться".

„Итакъ, реформа требуетъ введенія новыхъ идей. Если эти идеи должны свестись къ тому, чтобы сказать ученикамъ, что это функціи, указать графикъ при случаѣ, то о реформѣ не приходится говорить. Каждый изъ насъ въ предѣлахъ дѣйствующихъ программъ свободно можетъ сдѣлать все это, но тогда не было бы никакой реформы. Но рѣчь идетъ о томъ, чтобы попытаться провести эти идеи черезъ весь курсъ, а въ такомъ случаѣ есть два пути: либо увеличить время, либо ввести это взамѣнъ того, что́ входитъ сейчасъ въ курсъ школьной математики. Но время увеличить и Клейнъ не рѣшается, онъ рѣшительно противъ этого. Значитъ, надо сократить существующій курсъ и сократить основательно. Борель сдѣлалъ такъ: онъ выбросилъ неопредѣленныя уравненія, непрерывныя дроби, теорію соединеній, биномъ Ньютона, бо́льшую часть того, что́ относится къ дѣйствіямъ надъ радикалами. Можетъ быть, Марковъ выразился очень сильно, но я не могу сочувствовать тому, чтобы эти капитальныя вещи выбросить изъ обученія. Есть мнѣнія, что можно выбросить изъ нашихъ учебниковъ много хламу, много устарѣлаго; простите, но я не вѣрю этому".

„Я приведу характерный фактъ: Лермантовъ несомнѣнный сторонникъ того, чтобы выбросить возможно больше; но что же онъ выбросилъ: извлеченіе корней изъ многочленовъ. Ничего существеннаго не было указано: и я почти не знаю этого существеннаго, и никто изъ ораторовъ еще мнѣ этого не сказалъ. Я считаю, что за ничтожнымъ исключеніемъ тотъ матеріалъ, который составляетъ въ настоящее время школьную программу, необходимъ. Ко всему этому присоединяются многія другія обстоятельства. Говоря о томъ, что́ можно выбросить, нужно имѣть въ виду, что Клейнъ располагалъ болѣе обширной программой, когда говорилъ о сокращеніи программы, а именно: рѣшеніемъ уравненій 3-й и 4-й степени. Онъ выбросилъ это съ легкимъ сердцемъ, но и мы это давно выбросили".

„Я не могу останавливаться очень долго на томъ, на чемъ хотѣлъ бы остановиться, и прежде всего на болѣе продолжительномъ курсѣ учебнаго года, дающемъ несомнѣнно бо́льшую успѣшность, чѣмъ та, которую мы получаемъ. У насъ небольшой учебный годъ, а въ Германіи къ тому же и 9-ти-лѣтній курсъ, вмѣсто 8-ми-лѣтняго. Все это вмѣстѣ взятое ставитъ насъ въ такія условія, что съ легкимъ сердцемъ перенести на нашу почву все то, что́ предлагаетъ реформа въ Германіи, нельзя".

„Господа, я ни на минуту не хотѣлъ бы, чтобы меня отнесли къ противникамъ реформы и въ особенности къ противникамъ

идеи введенія въ среднюю школу началъ анализа. Я только думаю, что вопросъ въ томъ, какъ это выполнить? Это очень серьезный вопросъ, къ которому, на мой взглядъ, нельзя относиться очень легко".

„Еще одно: я не знаю хорошихъ учебниковъ, основанныхъ на новыхъ идеяхъ. Я долженъ сказать, что курсъ алгебры на русскомъ языкѣ Лебединцева представляется мнѣ написаннымъ наиболѣе удачно для осуществленія идеи реформы. Клейнъ читалъ лекціи студентамъ, будущимъ учителямъ, съ каѳедры онъ говорилъ имъ о реформѣ то, что́ проповѣдывалъ въ обществахъ и собраніяхъ педагоговъ. Эти лекціи напечатаны. Первая часть книги выходитъ въ русскомъ переводѣ подъ редакціей вашего покорнаго слуги. Вчера въ одной изъ аудиторій я слышалъ необычайно восторженные отзывы объ этой книгѣ: говорили, что въ ней вы найдете если не все, то почти все то, что́ должна дать книга, говорящая о новыхъ теченіяхъ. Это указаніе опять неудачно. Я былъ бы очень счастливъ, если бы могъ сказать: „Вотъ книга, пріобрѣтите ее, и въ вашихъ рукахъ будетъ сочиненіе, которое можетъ служить ключемъ для рѣшенія вопроса о реформѣ". Увы, я этого не могу сказать. Книга въ высшей степени интересна, но врядъ ли для будущихъ учителей, для осуществленія реформы На мой взглядъ, эта книга въ высшей степени интересна для математика и вызываетъ удивленіе въ томъ отношеніи, что показываетъ, какая глубокая пропасть отдѣляетъ общую проповѣдь о реформѣ отъ реальнаго ея осуществленія. Мнѣ не легко объ этомъ говорить, господа, но я считаю себя обязаннымъ сказать это".

„Я кончаю и хочу повторить, что́ я далекъ отъ того, чтобы быть противникомъ реформы. Но въ одномъ изъ сочиненій, недавно появившемся на русскомъ языкѣ, сочиненіи, которое я считаю очень цѣннымъ, сказано, что математики уяснили себѣ, наконецъ, всю безсмысленность того, что̀ они дѣлаютъ въ настоящее время. На этой точкѣ зрѣнія я не могу стоять. То, что мы дѣлаемъ, въ настоящее время подлежитъ реформѣ. Я сдѣлалъ нѣкоторыя предложенія въ Организаціонномъ Комитетѣ для осуществленія этой идеи. Я полагаю, что эти соображенія нужно представить Общему Собранію *), но я считаю, что всѣ эти реформы должны быть проведены съ крайней осторожностью, и что легче ихъ широкое значеніе провозглашать, чѣмъ дѣйствительно осуществлять".

А. Р. Кулишеръ. (Спб.). „Я съ большимъ вниманіемъ прослушалъ тѣ соображенія, которыя высказалъ Веніаминъ Ѳедоровичъ;

*) См. Резолюціи Съѣзда. *Прим. Ред.*

я ихъ прослушалъ съ особеннымъ вниманіемъ, во-первыхъ, потому, что перу Веніамина Ѳедоровича принадлежатъ два тома интереснѣйшаго сочиненія по вопросамъ геометріи, и, во-вторыхъ, потому, что онъ постоянно слѣдитъ за всѣмъ тѣмъ, что дѣлается въ средней школѣ".

„Веніаминъ Ѳедоровичъ разсказалъ о томъ, какъ у насъ былъ встрѣченъ курсъ Бореля, и прибавилъ, что онъ совершенно согласенъ съ тѣми возраженіями, какія дѣлаются противъ этого курса. Я присоединяюсь къ этимъ возраженіямъ, причемъ прибавлю, что они должны возникнуть у каждаго ревностнаго поклонника реформы, когда онъ внимательно отнесется къ книгѣ Бореля. Вчера я имѣлъ честь въ одной изъ аудиторій разбирать книги, написанныя по Эвклиду. Я разобралъ 5 или 6 книгъ и въ каждой изъ нихъ я выдѣлилъ части, написанныя замѣчательно и дѣйствительно осуществляющія пожеланіе, которое было такъ прекрасно выражено въ рѣчи Богомолова. Разсматривая большіе тома этихъ учебниковъ: два итальянскихъ—Басани и Веронезе, два французскихъ и нѣмецкій Трейтлейна,—я показалъ, что́ удалось каждому изъ этихъ авторовъ осуществить. Въ учебникѣ Басани обосновано движеніе конкретнаго—реальнаго міра, въ которомъ мы живемъ. Веронезе отмѣтилъ роль движенія въ развитіи геометріи, онъ блестяще справился съ своей задачей. У него можно взять матеріалъ и составить учебникъ. Что касается учебниковъ Бореля и Бурле, то изложеніе у Бореля лучше. Наконецъ, нѣмецкій педагогъ Трейтлейнъ, составившій новѣйшую книгу—начальный и основной курсъ геометріи,—показалъ, какъ педагоги должны писать учебники и ввелъ новыя идеи въ среднюю школу".

„Мы теперь на перепутьи: есть учебники и руководства, написанные достаточно талантливыми людьми; нѣкоторые курсы написаны спѣшно, безъ достаточнаго вниманія, но все-таки новые курсы есть. Не слѣдуетъ смотрѣть пессимистически на то, что не удается осуществить сразу эту задачу, надо только идти по вѣрному пути и наряду съ новыми пріемами не забывать о богатствѣ, накопленномъ старыми педагогическими пріемами. Если мы не забудемъ, того, что́ дѣлала старая школа, и внесемъ тѣ начала и самодѣятельности, которыя вліяютъ не только на характеръ учениковъ, но и на интеллектуальную ихъ сторону, то скоро осуществимъ первыя начинанія; основанія для пессимизма нѣтъ никакого".

М. Г. Ребиндеръ (Юрьевъ). „По поводу доклада А. Г. Пичугина я долженъ сказать, что давно уже являюсь горячимъ сторонникомъ введенія въ среднюю школу понятія о функціи. Но способы введенія подобнаго рода понятій могутъ быть различны. Въ этихъ способахъ я расхожусь съ кіевскими математиками. Кіевскіе математики, какъ извѣстно, для того, чтобы ввести понятіе о функціи, считаютъ умѣстнымъ исключить цѣлый рядъ статей, между про-

чимъ биномъ Ньютона. По этому поводу я долженъ сказать, что я горячій противникъ исключенія бинома Ньютона, такъ какъ онъ, по моему мнѣнію, существенно важенъ для математическаго образованія учениковъ средней школы".

С. С. Григорьевъ (Спб.). „Я остановлю вниманіе Собранія на томъ же вопросѣ, но съ другой точки зрѣнія. Дѣло въ томъ, что содержаніе курса математики разсматривается прежде всего съ точки зрѣнія чисто научной. Затѣмъ оно разсматривается съ точки зрѣнія учениковъ такъ, какъ мы этихъ учениковъ понимаемъ, или такъ, какъ мы ихъ можемъ понимать по тѣмъ обрывкамъ, какіе намъ даетъ психологія. Я позволю себѣ обратить вниманіе Собранія на совершенно другую точку зрѣнія. Я бы хотѣлъ, чтобы при сужденіяхъ о программахъ преподаванія математики, какъ и всѣхъ другихъ, принималась во вниманіе прежде всего точка зрѣнія самого ученика. Я не берусь толковать его точку зрѣнія, но я позволю себѣ обратить вниманіе Собранія на это положеніе и внести особое реальное предложеніе. Чтобы это сдѣлать, я долженъ хотя бы вкратцѣ затронуть слѣдующій вопросъ: чѣмъ глубже, чѣмъ основательнѣе вы изучаете вашъ предметъ, чѣмъ вы больше имъ интересуетесь, кромѣ того, чѣмъ больше любите вашихъ учениковъ, тѣмъ естественнѣе является стремленіе дать этимъ ученикамъ какъ можно больше и какъ можно глубже ввести ихъ въ нѣдра своей науки. Господа, не забывайте, что на этой же точкѣ зрѣнія стоятъ и ваши товарищи — преподаватели физики, естествознанія и пр. Я не буду говорить о тѣхъ задачахъ, которыя лежатъ также и на нихъ. Вѣдь они должны ознакомить учениковъ съ жизнью природы, они должны дать хоть легкій намекъ на міропониманіе, а для этого нужно коснуться жизни не только земли, но и солнца, какъ источника энергіи, которое даетъ жизнь и правитъ ею на землѣ. Учитель долженъ показать и силу человѣческаго генія, который даетъ возможность заглянуть и въ созданіе міра. Дальше, онъ долженъ ознакомить съ жизнью земли, съ жизнью органической и неорганической природы. Развѣ онъ не долженъ этого сдѣлать?"

„Загляните къ преподавателю исторіи: у него на очереди еще болѣе важные вопросы: вѣдь онъ долженъ, преподавая исторію, ознакомить съ жизнью людей, со всѣми ея формами, съ исторіей этихъ формъ, для того, чтобы человѣкъ, вышедшій изъ школы, зналъ свое мѣсто, зналъ окружающій міръ людей. Возьмите преподавателя литературы: онъ долженъ раскрыть ученику человѣческую душу, чтобы ученикъ могъ познать самого себя. Я не буду уже говорить о другихъ предметахъ преподаванія, достаточно и этого, но вы должны задать себѣ вопросъ: если каждый пре-

подаватель увеличитъ свой предметъ, то что же будетъ съ ученикомъ?"

„Трагизмъ положенія увеличится еще болѣе, если каждый изъ насъ, имѣя совершенно ясное представленіе о зданіи изучаемаго предмета, о всѣхъ частяхъ его, о формахъ дѣйствія, планахъ, гармоніи, захотѣлъ бы все это передать ученикамъ: развѣ это возможно? Нѣтъ, потому что ученикъ не можетъ воспринять всего этого. Учитель изъ этого зданія долженъ вынимать кирпичики и систематически знакомить съ ними учащихся. Смотрите, что остается у ученика? У него не красивое зданіе, а повседневная работа, совершенно, можетъ быть, не входящая въ его интересы. Что же изъ этого можетъ выйти? Совсѣмъ не то, чего мы желаемъ: ученики будутъ лишь выучивать преподносимое вами. Но развѣ вы только этого хотите? А чтобы они усвоили все передаваемое нужно стать на другую точку зрѣнія, на точку зрѣнія ихъ самихъ. Какъ же это сдѣлать?"

„Я позволилъ бы себѣ внести предложеніе, имѣя за собой авторитетъ великаго мудреца не только русскаго, но и всемірнаго, Л. Н. Толстого. Онъ говоритъ, что мы должны учиться у нашихъ учениковъ, а какъ же мы можемъ учиться? Надо дать ученику право заявлять о своихъ интересахъ, о своихъ желаніяхъ, о томъ, что онъ хочетъ въ данную минуту учить. Этого права у ученика нашей школы и даже Западно-Европейской, за единичными исключеніями, нѣтъ. Поэтому желательно, чтобы каждая школа отводила ежедневно время не только для тѣхъ лабораторныхъ занятій, которыя связаны съ курсомъ, но и для занятій по тѣмъ вопросамъ, которые интересуютъ самого ученика въ данный моментъ, чтобы— одинъ ли ученикъ, много ли учениковъ—имѣли возможность и мѣсто, нашли бы и руководство и орудія для удовлетворенія въ данную минуту ихъ интересовъ. Я боюсь дальше объ этомъ говорить такъ какъ это связано со многимъ другимъ. Не смѣю больше задерживать ваше вниманіе, но мнѣ хотѣлось бы, чтобы эта точка зрѣнія—самихъ учениковъ—принималась во вниманіе въ программѣ и въ постановкѣ школьнаго дѣла и имѣла бы значеніе".

А. Д. Санько (Курскъ). „Я придаю особенное значеніе Первому Всероссійскому Съѣзду Преподавателей Математики. Въ Западной Европѣ уже приступили къ реформѣ, и во Франціи она даже отчасти уже проведена въ жизнь. И эта реформа будетъ главной задачей, главнымъ вопросомъ нашего Съѣзда. Но тутъ возможно увлеченіе какъ въ одну сторону, такъ и въ другую. Съ одной стороны, желательно провести реформу, съ другой — желательно расширить программу, ввести, напр., понятіе о функціяхъ. Но какъ же ввести, когда времени нѣтъ? По-

этому предлагаютъ сократить нѣкоторые отдѣлы. Но какъ ни стараются, сокращенія выходятъ очень незначительны. Предполагается выбросить извлеченіе корней и неопредѣленныя уравненія изъ курса средней школы. Это уже одна изъ тѣхъ крайностей, на которую стремятся, лишь бы только найти мѣсто для началъ анализа".

„Мнѣ кажется, что книга Бореля имѣетъ большое значеніе. Можетъ быть, изложеніе Бореля не вполнѣ удовлетворительно, но это—первая ласточка, это — первая книга, которая можетъ подходить къ современнымъ требованіямъ курса средней школы. „Книга Бореля есть тотъ минимумъ, который наши ученики могутъ усвоить. Она даетъ понятіе о функціяхъ, графическія изображенія функцій. Если бы у насъ были, какъ во Франціи, классическія и гуманитарныя отдѣленія въ школахъ, то можно было бы ограничиться изученіемъ курса Бореля. Курсъ Бореля не даетъ научнаго изложенія математики, но онъ знакомитъ съ самой математикой и даетъ очень много важныхъ знаній для большинства современныхъ учащихся".

„Главная задача и значеніе средней школы въ томъ, чтобы не только дать понятія, но и познакомить съ методомъ, развить научное мышленіе и не только математическое, но и философское. Нельзя ограничиться изученіемъ производныхъ и простыхъ способовъ дифференцированія и интегрированія, но въ старшихъ классахъ нужно приступить уже къ началамъ анализа; въ немъ сущность философско-математическаго мышленія".

К. Г. Краевскій (Бѣлый, Смол. г.) развиваетъ мысль, что реформа преподаванія математики должна быть проводима въ соотвѣтствіи съ другими предметами обученія, чтобы ученики имѣли достаточно времени для занятій каждымъ предметомъ. Далѣе ораторъ предлагаетъ Съѣзду вынести резолюцію объ уничтоженіи существующаго дѣленія среднихъ учебныхъ заведеній на классическія и реальныя. Такое дѣленіе, по его мнѣнію, умѣстно лишь въ старшихъ классахъ сообразно съ опредѣлившимися индивидуальными особенностями учениковъ и съ ихъ умственными запросами. Ораторъ полагаетъ, что безъ этой общей школьной реформы никакія частныя поправки—введеніе графикъ, введеніе началъ анализа взамѣнъ бинома Ньютона и непрерывныхъ дробей—не достигнутъ цѣли".

А. Г. Пичугинъ (Красноуфимскъ). „Здѣсь такъ много высказалось лицъ по вопросу о реформѣ, что у меня нѣтъ возможности отвѣтить каждому въ деталяхъ, но я хочу все-таки указать на нѣкоторые недочеты и недомолвки, а, можетъ быть, и на непониманіе того, что я предлагаю со своей стороны. Мнѣ кажется

что общее впечатлѣніе таково: всѣ соглашаются съ тѣмъ положеніемъ, что реформа необходима въ духѣ, указанномъ Клейномъ и западными учеными, что эта реформа рано или поздно придетъ и къ намъ, какъ пришла во Францію, но что въ данный моментъ у насъ нѣтъ учебниковъ. Но вѣдь это вопросъ времени. Учебникъ Бореля составленъ только для 3, 4 и 5 классовъ, и я обращаю вниманіе Собранія на то обстоятельство, что въ немъ, дѣйствительно, нѣтъ строго-обоснованной теоріи (такъ, напр., тамъ плохо изложены логариѳмы). Но какъ Борель, такъ и Берендсонъ и Гётингъ, о которыхъ сейчасъ говорили, въ своихъ учебникахъ ставили себѣ цѣлью дать ученикамъ элементы анализа въ наиболѣе понятной формѣ. У насъ у русскихъ есть большое стремленіе все строго обосновать; но этотъ позолоченный орѣхъ не по дѣтскимъ зубамъ".

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

30 декабря 10 1/2 ч. дня.

Въ предсѣдатели избранъ проф. П. А. Некрасовъ. Въ почетные секретари—I. И. Чистяковъ.

XI. Докладъ пр.-доц. В. Ѳ. Кагана **«О преобразованіяхъ многогранниковъ»**, помѣщенъ дальше (см. огл.).

XII. Курсъ теоретической ариѳметики въ старшихъ классахъ средней школы.

Докладъ Б. Б. Піотровскаго (Спб.).

«Въ программахъ послѣдняго класса большинства нашихъ средне-учебныхъ заведеній имѣетъ мѣсто курсъ ариѳметики. Матеріаломъ этого курса является повтореніе всѣхъ отдѣловъ курса ариѳметики младшихъ классовъ съ дополненіемъ теоретическихъ обоснованій нѣкоторыхъ вопросовъ. Этому курсу часто даютъ наименованіе курса «теоретической ариѳметики».

Нерѣдко приходится встрѣчать среди преподавателей математики отрицательное отношеніе къ этому курсу. При этомъ нѣкоторые, совершенно отрицая умѣстность болѣе или менѣе строгаго логическаго обоснованія ариѳметическихъ понятій въ средней школѣ, указываютъ въ то же время на безполезность нынѣ практикуемаго въ старшемъ классѣ курса въ смыслѣ укрѣпленія въ ученикахъ навыковъ въ вычисленіяхъ и сознательнаго къ нимъ отношенія. Другіе же, признавая необхо-

димымъ въ послѣднемъ концентрѣ преподаванія обосновать, обобщить и систематизировать вопросы, относящіеся къ ученію о числѣ, находятъ, что эта цѣль совершенно не достигается нынѣ практикуемымъ курсомъ.

Среди учениковъ этотъ курсъ въ большинствѣ случаевъ не вызываетъ никакого интереса, представляя въ то же время не малыя трудности съ точки зрѣнія экзаменныхъ требованій, согласно которымъ ученики должны изучать формальныя доказательства нѣкоторыхъ теоремъ, очень мало связанныхъ между собой какой-либо общей руководящей идеей и потому усваиваемыхъ лишь внѣшнимъ образомъ, преимущественно памятью, и, кромѣ того, ученики должны «натаскаться» къ экзамену въ рѣшеніи трудныхъ задачъ «чисто-ариѳметическими» пріемами. Подъ «ариѳметическимъ» пріемомъ при этомъ обыкновенно разумѣется пріемъ рѣшенія задачи, воспрещающій употребленіе буквъ для обозначенія неизвѣстныхъ чиселъ и составленія уравненій изъ условій задачи. Помимо того, что такое требованіе налагаетъ на учениковъ непонятное для нихъ ограниченіе пользованія при рѣшеніи задачъ такимъ цѣннымъ усвоеннымъ ими орудіемъ, какъ составленіе уравненій, это требованіе вноситъ еще въ сознаніе учениковъ совершенно превратное понятіе о томъ, что́ такое алгебра.

Мнѣ кажется, что было бы весьма желательно на настоящемъ Съѣздѣ обсудить вопросъ: должно ли имѣть мѣсто въ послѣднемъ концентрѣ курса математики средней школы обобщеніе вопросовъ, относящихся къ ученію о числѣ, и ихъ болѣе или менѣе строгое логическое обоснованіе.

Въ случаѣ положительнаго рѣшенія этого вопроса придется обсудить: каковы должны быть матеріалъ и характеръ изложенія курса ариѳметики въ послѣднемъ концентрѣ съ тѣмъ, чтобы была, дѣйствительно, достигнута поставленная цѣль.

Въ случаѣ же отрицательнаго рѣшенія этого вопроса, по моему мнѣнію, слѣдуетъ вовсе отказаться отъ какого бы то ни было повторенія ариѳметики въ послѣднемъ классѣ, употребивъ освободившіеся при этомъ часы на что-либо болѣе производительное—напр., на упражненія учениковъ въ прибли-

женныхъ вычисленіяхъ съ выясненіемъ тѣхъ положеній, на основаніи которыхъ можетъ быть полученъ результатъ съ данной степенью точности, при этомъ, конечно, извлеченіе квадратнаго корня и употребленіе при вычисленіяхъ логариѳмическихъ таблицъ не должно быть игнорируемо на томъ основаніи, что эти вопросы при настоящемъ построеніи курса попали въ «загородку», именуемую «курсомъ алгебры».

Въ настоящемъ докладѣ я предлагаю рѣшеніе поставленнаго выше вопроса въ утвердительномъ смыслѣ и для обоснованія такого рѣшенія вопроса ставлю слѣдующія положенія: а) математикѣ, какъ наукѣ, присущи абстрактность и строгая дедукція; этими свойствами опредѣляется мѣсто, занимаемое математикой въ ряду другихъ наукъ, и ея значеніе. Въ средней школѣ, конечно, не можетъ быть изучаема «наука» въ строгомъ смыслѣ этого слова; не подлежитъ сомнѣнію, что это недопустимо, какъ съ точки зрѣнія психологическихъ и дидактическихъ требованій, такъ и съ точки зрѣнія требованій практической жизни, но я полагаю, что при преподаваніи того или иного учебнаго предмета совершенно необходимо считаться съ «наукой» и ея современными тенденціями.

Относясь съ полнымъ уваженіемъ къ тому современному теченію, согласно которому психологія возраста учащихся, наглядность обученія, практичность изучаемаго матеріала должны занять подобающее имъ мѣсто въ вопросахъ обученія, я иногда опасаюсь, какъ бы одностороннее увлеченіе не отодвинуло совсѣмъ назадъ тѣ требованія, которыя въ правѣ предъявлять наука къ учебному предмету.

До сихъ поръ математика признавалась почти единственнымъ предметомъ школьнаго курса, болѣе или менѣе строгое изложеніе котораго является возможнымъ въ средней школѣ, и въ этомъ смыслѣ математикѣ придавалось особое среди другихъ предметовъ значеніе въ отношеніи формальнаго развитія учащихся, выработки въ нихъ способности къ строгости и осторожности въ сужденіяхъ; логическому элементу въ курсѣ математики отводилось видное мѣсто. Я вполнѣ согласенъ съ тѣмъ, что въ этомъ отношеніи курсъ математики грѣшилъ односторонностью, вредившей, какъ разностороннему развитію учащихся, такъ и успѣху преподаванія математики, но я по-

лагаю, что намѣчаемая реформа въ преподаванiи математики дастъ возможность отвести подобающее мѣсто въ послѣднемъ концентрѣ курса и такимъ вопросамъ, какъ, напримѣръ, расширенiе понятiя о числѣ, значенiе аксiомъ въ построенiи геометрической системы и т. п. При этомъ логическiй элементъ будетъ представленъ по существу, ученики будутъ введены въ кругъ нѣкоторыхъ обобщающихъ идей, необходимыхъ для болѣе глубокаго усвоенiя математическихъ понятiй и имѣющихъ широкое общеобразовательное значенiе.

b) Понятiя о натуральномъ числѣ и основныхъ операцiяхъ надъ натуральными числами вмѣстѣ съ идеей расширенiя понятiя о числѣ являются основными понятiями, безъ которыхъ невозможно дальнѣйшее обоснованiе методовъ математическаго анализа.

Въ курсѣ средней школы необходимо обратить вниманiе на «ариѳметизацiю» основныхъ символовъ и понятiй—въ этомъ отношенiи въ настоящее время царитъ полный безпорядокъ. Между тѣми символами и понятiями, съ которыми оперируютъ ученики въ курсѣ алгебры и нѣкоторыхъ другихъ отдѣлахъ, и идеей о числѣ не устанавливается почти никакой связи. Въ реформированномъ курсѣ математики предполагается ввести въ средней школѣ преподаванiе началъ анализа безконечно-малыхъ, при этомъ понятiя о предѣлѣ, непрерывности потребуютъ, мнѣ кажется, прочнаго ариѳметическаго фундамента, безъ котораго эти понятiя могутъ быть истолкованы учениками въ совершенно нежелательномъ смыслѣ.

Обращу еще ваше вниманiе на слѣдующее: въ то время, когда установленiе основныхъ геометрическихъ понятiй признается необходимымъ провести на извѣстной ступени обученiя болѣе или менѣе строго, на установленiе основныхъ ариѳметическихъ понятiй въ средней школѣ почти не обращается никакого вниманiя.

Я не имѣю въ виду разсмотрѣнiе вопроса, какимъ образомъ расширенiе понятiя о числѣ должно быть методически проведено черезъ весь курсъ средней школы, я хочу лишь обратиться къ послѣднему концентру этого курса и, исходя изъ изложенныхъ выше соображенiй, намѣтить курсъ ариѳметики послѣдняго класса такъ, чтобы въ этомъ курсѣ былъ систе-

матизированъ, обобщенъ и изложенъ съ доступной для учениковъ этого класса строгостью весь ариѳметическій матеріалъ, съ которымъ они уже фактически были ознакомлены въ различныхъ отдѣлахъ курса математики.

На ряду съ ученіемъ о числѣ натуральномъ и дробномъ я предполагаю включить также въ этотъ курсъ и ученіе о числѣ отрицательномъ и ирраціональномъ.

Конечно было бы желательно провести въ этомъ курсѣ и дальнѣйшее расширеніе понятія о числѣ, изложивъ статью о комплексномъ числѣ вида $a+bi$, но я боюсь, что это слишкомъ увеличитъ объемъ курса, хотя я долженъ признать, что совершенно обойти вопросъ о комплексномъ числѣ въ курсѣ средней школы—врядъ ли возможно.

Предлагаемый мною курсъ и долженъ замѣнить собою повторительный курсъ ариѳметики, практикуемый нынѣ въ старшихъ классахъ средне-учебныхъ заведеній.

Что касается до статей о дѣлимости чиселъ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, то не отрицая ихъ цѣнности въ курсѣ средней школы, я полагаю, что эти статьи могутъ быть достаточно развиты въ среднихъ классахъ; курсъ же ариѳметики послѣдняго класса долженъ быть отъ нихъ освобожденъ съ тѣмъ, чтобы дать возможность учителю сосредоточить вниманіе учащихся на отчетливомъ проведеніи идеи расширенія понятія о числѣ.

Если и повторительный курсъ геометріи послѣдняго класса будетъ посвященъ не сплошному повторенію матеріала, а его систематизированію и обобщенію, съ должнымъ подчеркиваніемъ значенія аксіомъ, методовъ доказательствъ, возможности построенія различныхъ геометрическихъ системъ, то эти два курса, ариѳметики и геометріи, будутъ помогать другъ другу и вводить учащихся въ кругъ широко обобщающихъ идей.

Долженъ еще обратить ваше вниманіе на то, что повторительный курсъ алгебры въ послѣднемъ классѣ будетъ весьма значительно разгруженъ—весь числовой матеріалъ отойдетъ къ предлагаемому мною курсу ариѳметики, а въ курсѣ алгебры должны быть оставлены лишь тѣ немногія и коротенькія

статьи, въ которыхъ излагаются нѣкоторыя свойства цѣлой алгебраической функціи и которыя, дѣйствительно, должны быть отнесены къ курсу алгебры.

Исходя изъ изложенныхъ мною выше соображеній, я намѣчаю ниже программу курса ариѳметики старшаго класса, которую я, благодаря особенно благопріятно сложившимся для меня обстоятельствамъ, имѣлъ возможность провести въ одномъ изъ учебныхъ заведеній.

1) *Понятіе о рядѣ натуральныхъ чиселъ* устанавливается, исходя изъ понятія о рядѣ символовъ, слѣдующихъ другъ за другомъ въ опредѣленномъ, разъ навсегда установленномъ порядкѣ. Основныя свойства этого ряда символовъ.

Установленіе понятій: равенства и неравенства (аксіомы равенства и аксіомы порядка). Однозначное соотвѣтствіе между элементами нѣкоторой совокупности и символами ряда натуральныхъ чиселъ—численность совокупности предметовъ.

2) *Операція сложенія натуральныхъ чиселъ.* Операція эта опредѣляется слѣдующими условіемъ и аксіомой:

1) $a+1$ — есть число непосредственно слѣдующее за числомъ a въ ряду натуральныхъ чиселъ.

2) $a+(b+1)=(a+b)+1$ — аксіома Грассмана.

Я сознаю, что такой аксіоматическій способъ опредѣленія сложенія своей абстрактностью можетъ сначала оказаться очень трудно усваиваемымъ учениками, привыкшими со словомъ «сложеніе» соединять не понятіе о нѣкоторой формальной операціи надъ символами, а представленіе о соединеніи элементовъ нѣсколькихъ совокупностей въ одну совокупность. Придется не мало поработать учителю надъ тѣмъ, чтобы ученики усвоили совершенно новую для нихъ и весьма отвлеченную точку зрѣнія, но мнѣ кажется, что безъ этого врядъ ли удастся провести идею расширенія понятія о числѣ: вѣдь три плюсъ пять, если держаться конкретной точки зрѣнія на сложеніе, не имѣетъ ничего общаго съ операціей сложенія чиселъ: «2» и «-7», «$\sqrt{2}$» и «$\sqrt{5}$»—общность этихъ операцій заключается лишь въ постоянствѣ формальныхъ законовъ этихъ операцій, поэтому, если мы хотимъ эту общность уста-

новить, то отъ формальной точки зрѣнія на операціи намъ не уйти.

Я позволю себѣ обратить вниманіе собранія на тѣ моменты работы учителя въ классѣ, которые мнѣ представляются особенно важными при формальномъ опредѣленіи операціи сложенія:

1) Надо выяснить ученикамъ, что понятія—сумма чиселъ и сложеніе чиселъ—до сихъ поръ ими не опредѣлялись, между тѣмъ надо же какъ-нибудь логически установить эти основныя понятія, которыми они пользуются на каждомъ шагу.

Можетъ быть умѣстно будетъ провести параллель между этими понятіями и геометрическимъ понятіемъ о прямой—ученики сами при этомъ укажутъ, что понятіе о прямой устанавливается посредствомъ нѣкоторыхъ аксіомъ и послѣ этого будетъ умѣстно предложить ихъ вниманію и аксіоматическій способъ опредѣленія операціи сложенія.

2) Надо тщательно озаботиться о томъ, чтобы подъ символомъ $a+1$ ученики не разумѣли бы ничего другого, кромѣ числа, непосредственно слѣдующаго въ ряду натуральныхъ чиселъ за даннымъ числомъ a; при этомъ надо подчеркнуть слѣдующее: символъ a данъ, подъ $a+1$, по условію, разумѣется символъ непосредственно слѣдующій за символомъ a; такъ какъ за каждымъ членомъ ряда натуральныхъ чиселъ слѣдуетъ одно и только одно число, то симвомъ $a+1$ является вполнѣ опредѣленнымъ.

3) Для выясненія значенія аксіомы сложенія я предложилъ бы поступить слѣдующимъ образомъ: надо подробно разсмотрѣть элементы каждой изъ частей тожества: $a+(b+1)=$ $=(a+b)+1$ и при этомъ подчеркнуть слѣдующее:

a—заданный символъ въ ряду натуральныхъ чиселъ;

b—тоже;

$b+1$—число, непосредственно слѣдующее за числомъ b.

Который изъ символовъ ряда натуральныхъ чиселъ разумѣть подъ $a+(b+1)$—не знаю, но написанное тожество говоритъ мнѣ, что я зналъ бы его, если бы зналъ тотъ символъ, который слѣдуетъ разумѣть подъ $a+b$, такъ какъ $(a+b)+1$, по условію, есть число, непосредственно слѣдующее за числомъ $a+b$.

Послѣ этого надо предложить ученикамъ цѣлый рядъ упражненій, съ повтореніемъ при этомъ предыдущихъ разсужденій.

Напримѣръ: какое число слѣдуетъ разумѣть подъ символомъ $4+3$ — не знаю. Число 3 въ ряду натуральныхъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ за числомъ 2, а потому, согласно условію, $3=2+1$; $4+3=4+(2+1)$; на основаніи же аксіомы сложенія: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1$; далѣе, по условію $2=1+1$ и слѣдовательно: $4+3=4+(2+1)=$ $=(4+2)+1=[4+(1+1)]+1$; примѣняя опять аксіому сложенія, имѣю: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1=[(4+1)+1]+1$; по условію $4+1=5$ и слѣдов.: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1=$ $+[4+(1+1)]+1=[(4+1)+1]+1=(5+1)+1=6+1=7$.

Обращаю вниманіе на то, что проведенный при выясненіи значенія аксіомы сложенія способъ разсужденія уже подготовляетъ учениковъ къ усвоенію метода математической индукціи, которымъ я предполагаю въ дальнѣйшемъ пользоваться.

Законы операціи сложенія:

$$\text{соединительный: } a+(b+c)=(a+b)+c; \qquad (1)$$

$$\text{перемѣстительный: } a+b=b+a. \qquad (2)$$

Обративъ вниманіе учениковъ, что тожество, выражающее аксіому сложенія есть частный случай тожества (1) для $c=1$, надлежитъ обстоятельно выяснить ученикамъ сущность метода математической индукціи и затѣмъ доказать этимъ методомъ справедливость тожествъ (1) и (2).

На рядѣ частныхъ примѣровъ надо показать ученикамъ, что на основаніи законовъ соединительнаго и перемѣстительнаго можетъ быть выполнено всякое преобразованіе одного выраженія, въ которомъ натуральныя числа соединены знакомъ плюсъ, въ другое ему тожественное.

Напримѣръ: доказать справедливость тожества: $[a+(b+$ $+c)]+d=(a+c)+(b+d)$.

$$[a+(b+c)]+d=[(a+(c+b)]+d\ldots$$

на основаніи закона перемѣстительнаго;

$$[a+(c+b)]+d=[(a+c)+b]+d\ldots$$

на основаніи закона соединительнаго;

$$[(a+c)+b]+d=(a+c)+(b+d)\ldots$$

на основаніи закона соединительнаго.

Учитель уже тутъ долженъ имѣть въ виду, что, установивъ законы основныхъ операцій надъ натуральными числами и создавъ далѣе новые числовые символы, при условіи соблюденія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій, онъ даетъ обоснованіе всей алгебрѣ преобразованій.

3) *Операція умноженія натуральныхъ чиселъ.*

Операція умноженія опредѣляется слѣдующими аксіомами:

1) $a.\ 1=a$

2) $a.\ (b+1)=ab+a$

Всѣ методическія указанія, сдѣланныя мною при разсмотрѣніи вопроса о сложеніи натуральныхъ чиселъ, относятся въ полной мѣрѣ и къ вопросу объ умноженіи. Въ виду полной аналогичности постановки этого вопроса по существу съ постановкой вопроса о сложеніи, при изложеніи его могутъ быть въ значительной степени использованы самодѣятельность и активное участіе учениковъ.

Законы операціи умноженія:

распредѣлительные: $a.(b+c)=a.b+a.c$;
$(a+b).c=a.c+b.c$;

соединительный: $a.(b.c)=(a.b).c$;

перемѣстительный: $a.b=b.a$.

Эти законы доказываются методомъ математической индукціи. Въ интересахъ экономіи времени «передѣлку» этихъ доказательствъ можно опустить, напомнивъ лишь ученикамъ сущность метода математической индукціи и предоставивъ желающимъ и болѣе сильнымъ провести доказательство вполнѣ самостоятельно въ видѣ упражненій. Вообще я долженъ обратить ваше вниманіе на то, что предлагаемый мною курсъ только тогда будетъ имѣть цѣнность, если при изученіи его учениками главное вниманіе будетъ обращено на идейную его сторону, а не на передѣлку доказательствъ, довольно однообразную, но подчасъ утомительную—въ особенности это слѣдуетъ имѣть въ виду по отношенію къ экзаменнымъ требованіямъ, гдѣ всѣ второстепенные вопросы, требующіе значительной работы памяти, должны быть рѣшительно выпущены.

Здѣсь также необходимо указать на рядѣ частныхъ примѣровъ, разрѣшенныхъ учениками самостоятельно, что всякое выраженіе, въ которомъ натуральныя числа соеди-

нены знаками сложенія и умноженія, можетъ быть преобразовано въ другое ему тождественное, исходя **только** изъ законовъ операцій сложенія и умноженія.

Напримѣръ: 1) $[(a.b).c].d = [(c.d).b]a$ — перестановка множителей въ произведеніи любого числа множителей.

2) $(a+b).(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

4) *Операція возведенія въ степень.*

Аксіомы, опредѣляющія эту операцію: $a^1 = a;\ a^{m+1} = a^m a.$

5^3 $\quad 5^{2+1} = 5^2.5 = 5^{1+1}.5 = (5.5).5 = 5.5.5.$

Основныя тождества:

$a^m.a^n = a^{m+n}$

$a^m.b^m = (ab)^m$

$(a^m)^n = a^{mn}$

доказательства этихъ тождествъ методомъ математической индукціи, при этомъ остается въ силѣ то замѣчаніе, которое было сдѣлано выше по поводу доказательства законовъ операціи умноженія.

5) Послѣ этого необходимо при активномъ участіи учениковъ сдѣлать общій обзоръ трехъ основныхъ операцій съ точки зрѣнія тѣхъ законовъ, которымъ онѣ подчиняются.

Для этого полезно ввести нѣкоторыя общія обозначенія вродѣ слѣдующихъ:

(1) $a \uparrow b = b \uparrow a$ — запись закона перемѣстительнаго для нѣкоторой операціи, обозначенной знакомъ «$\uparrow$»;

(2) $a \uparrow (b \uparrow c) = (a \uparrow b) \uparrow c$ — запись закона соединительнаго;

(3) $a \uparrow (b \Uparrow c) = (a \uparrow b) \Uparrow (a \uparrow c)$ — тождество, устанавливающее, что операція, обозначенная знакомъ « $\uparrow$ », подчиняется одному изъ распредѣлительныхъ законовъ по отношенію къ операціи, обозначенной знакомъ «$\Uparrow$»;

(4) $(a \Uparrow b) \uparrow c = (a \uparrow c) \Uparrow (b \uparrow c)$ — тождество, устанавливающее, что операція, обозначенная знакомъ «$\uparrow$» по отношенію къ операціи, обозначенной знакомъ «$\Uparrow$», подчиняется и второму распредѣлительному закону.

Принявъ эти обозначенія можно предложить ученикамъ рѣшить вопросы въ родѣ слѣдующихъ: 1) подчиняется ли операція возведенія въ степень закону соединительному? 2) имѣютъ ли мѣсто законы распредѣлительные для операціи возведенія въ степень по отношенію къ суммѣ? 3) имѣютъ ли мѣсто законы распредѣлительные для операціи возведенія въ степень по отношенію къ произведенію?

Подобные вопросы необходимо возбуждать и въ дальнѣйшемъ при изученіи обратныхъ операцій.

Опытъ мнѣ показалъ, что такой общій обзоръ операцій интересуетъ учениковъ и способствуетъ выработкѣ въ нихъ сознательнаго отношенія къ преобразованіямъ выраженій.

6) Операція, обратная операціи сложенія—**вычитаніе**.

Обращается вниманіе учениковъ, что вслѣдствіе коммутативности (перемѣстительный законъ) операціи сложенія возникаетъ лишь одна операція, обратная операціи сложенія.

Невозможность операціи вычитанія $a-b$, въ случаѣ $a<b$, оставаясь въ области натуральныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія вычитанія, какъ операціи обратной сложенію, и изъ законовъ операціи сложенія, выводится справедливость слѣдующихъ основныхъ тожествъ:

1) $a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b;$
2) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b;$
3) $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b;$
4) $a-b=(a+n)-(b+n);$
5) $a-b=(a-n)-(b-n).$

} достаточно показать сущность доказательства на примѣрѣ одного или двухъ тожествъ, не требуя «передѣлки» доказательствъ всѣхъ этихъ тожествъ.

Комбинируя примѣненіе законовъ сложенія, вычитанія и умноженія, ученики, въ видѣ упражненій, могутъ доказать справедливость, напримѣръ, слѣдующихъ тожествъ:

1) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$—убѣжденіе въ доказуемости этого тожества на случай $a>b$ и $c>d$, будетъ цѣнно при опредѣленіи сложенія относительныхъ чиселъ.

2) $a(b-c)=ab-ac;$

3) $(a-b).c=ac-bc;$

4) $a-b+c-d+f=(a+c+f)-(b+d);$

5) $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$ — это тожество будетъ имѣть значеніе при опредѣленіи умноженія относительныхъ чиселъ.

7) *Дѣленіе*, какъ операція обратная умноженію.

Вопросъ о дѣленіи натуральныхъ чиселъ проводится вполнѣ аналогично вопросу о вычитаніи.

Изъ опредѣленія дѣленія и изъ законовъ операціи умноженія выводятся слѣдующія тожества:

1) $a.(b:c)=(a.b):c$;
2) $a:(b.c)=(a:b):c$;
3) $a:(b.c)=(a:b).c$;
4) $a:b=(a.n):(b.n)$;
5) $a:b=(a:n):(b:n)$.

Надлежитъ обратить вниманіе учениковъ на аналогію этихъ тожествъ и тожествъ, вытекающихъ изъ опредѣленія вычитанія и законовъ сложенія.

Комбинируя примѣненіе законовъ сложенія, умноженія, вычитанія и дѣленія, ученики могутъ самостоятельно доказать справедливость слѣдующихъ тожествъ:

1) $(a:m)+(b:m)=(a+b):m$ —это тожество будетъ имѣть значеніе при опредѣленіи сложенія дробныхъ чиселъ.
2) $(a:m)-(b:m)=(a-b):m$;
3) $(a.b.c.k.l):m=a.b.(c:m)...k.l$;
4) $(a.b).(c:d)=(ac):(bd)$—это тожество имѣетъ значеніе при опредѣленіи умноженія дробныхъ чиселъ.
5) $(a:b):(c:d)=(ad):(bc)$.

8) Дѣйствія, обратныя возведенію въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

Обращается вниманіе на то, что, вслѣдствіе отсутствія закона перемѣстительнаго для операціи возведенія въ степень, возникаютъ двѣ обратныя операціи.

Невозможность выполненія этихъ операцій въ нѣкоторыхъ случаяхъ, оставаясь въ области натуральныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія операцій извлеченія корня и логариѳмированія и изъ законовъ операціи возведенія въ степень выводятся слѣдующія тожества:

1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$
2) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$
3) $(\sqrt[p]{a})^q=\sqrt[p]{a.q}$
4) $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[pq]{a}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$

1) $log_a(pq)=log_a p+log_a q$
2) $log_a(p:q)=log_a p-log_a q$
3) $log_a p^m=m\,log_a p$
4) $log_b a=\dfrac{log_c a}{log\ b}$

Расширеніе понятія о числѣ.

9) Изъ разсмотрѣнія разности $a-b$, въ случаѣ $a=b$, устанавливается понятіе о символѣ o, какъ модулѣ операціи сложенія: $a+o=a$. Вообще если $a\uparrow m=a$, то говорятъ, что символъ m есть модуль операціи $\uparrow$.

10) Статьи о числѣ отрицательномъ и о числѣ дробномъ я полагаю умѣстнымъ провести, исходя изъ понятія **о парѣ чиселъ**, какъ ариѳметическомъ символѣ. Такое изложеніе дастъ возможность установить общую точку зрѣнія по отношенію къ отрицательнымъ и дробнымъ числамъ. При этомъ учитель долженъ особенно внимательно отнестись къ усвоенію учениками понятія объ **ариѳметизаціи** символовъ, установивъ слѣдующія положенія:

1) при расширеніи понятія о числѣ для вновь создаваемаго символа должны быть опредѣлены понятія: «равно», «больше» и «меньше» и при томъ такъ, чтобы были удовлетворены аксіомы равенства и аксіомы порядка;

2) для вновь создаваемаго символа должны быть опредѣлены операціи сложенія и умноженія и при томъ такъ, чтобы эти операціи подчинялись тѣмъ же законамъ, что и операціи сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ—**принципъ** постоянства формальныхъ законовъ операцій;

3) натуральное число должно являться частнымъ случаемъ вновь созданнаго символа; такимъ образомъ, понятіе о числѣ будетъ обобщено, расширено.

Ниже я привожу схему параллельнаго изложенія статей о числѣ относительномъ (пара вида : $a-b$) и о числѣ дробномъ (пара вида $a:b$). Въ классѣ эти статьи могутъ быть проведены послѣдовательно одна за другою, а повтореніе ихъ слѣдуетъ провести параллельно.

$(a-b)$—символъ, опредѣляемый парою какихъ угодно натуральныхъ чиселъ a и b.	$\frac{a}{b}$ —символъ, опредѣляемый парою какихъ угодно натуральныхъ чиселъ.
1) Равенство паръ чиселъ вида: $a-b$.	**1) Равенство паръ чиселъ вида: $\frac{a}{b}$.**
Къ необходимости расширенія понятія о числѣ мы были приведены разсмотрѣніемъ операціи обратной сложенію; обращаясь къ этой операціи, видимъ, что разности $a-b$ и	Къ необходимости расширенія понятія о числѣ мы были приведены разсмотрѣніемъ операціи обратной умноженію; обращаясь къ этой операціи, видимъ, что частныя

$c-d$, въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, равны тогда и только тогда, если $a+d=b+c$. Это условіе и примемъ, какъ **опредѣленіе** равенства символовъ $(a-b)$ и $(c-d)$.

$a:b$ и $c:d$, въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, равны тогда и только тогда, если $a.d=b.c$. Это условіе и примемъ, какъ **опредѣленіе** равенства символовъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Эти опредѣленія должны быть оправданы тѣмъ, что они удовлетворяютъ **аксіомамъ равенства**.

2) Неравенство паръ чиселъ вида: $(a-b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, разность $a-b$ больше разности $c-d$ тогда и только тогда, если $a+d > b+c$. Это условіе и примемъ, какъ **опредѣленіе** понятій больше и меньше для паръ чиселъ вида $(a-b)$.

2) Неравенство паръ чиселъ вида: $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, частное $a:b$ больше частнаго $c:d$ тогда и только тогда, если $a.d > bc$. Это условіе примемъ, какъ **опредѣленіе** понятій больше и меньше для паръ чиселъ вида $\frac{a}{b}$.

Эти опредѣленія должны быть оправданы тѣмъ, что они удовлетворяютъ **аксіомамъ порядка**.

3) Основное свойство пары $(a-b)$ и приведеніе ея къ простѣйшему виду.

На основаніи даннаго выше опредѣленія доказывается: $(a-b)=[(a+m)-(b+m)]$ — пара вида $(a-b)$ не измѣнится, если къ каждому изъ ея членовъ прибавить или отъ каждаго изъ нихъ отнять одно и то же число.

Напр.: $(5-7)=(8-10)=(2-4)$.

3) Основное свойство пары $\frac{a}{b}$ и приведеніе ея къ простѣйшему виду.

На основаніи даннаго выше опредѣленія доказывается: $\frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.m}$ т. е. пара вида $\frac{a}{b}$ не измѣнится, если каждый изъ ея членовъ умножить или каждый изъ нихъ раздѣлить на одно и то же число.

Напримѣръ: $\frac{12}{18}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$.

Въ случаѣ $a > b, (a-b) = (m-o)$, гдѣ m есть натуральное число, разность чиселъ a и b. Символъ $(m-o)$ условимся считать тожественнымъ натуральному числу m. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ символъ $(a-b)$ представляетъ собою натуральное число.

Въ случаѣ $a < b$, $(a-b) = (o-m)$, гдѣ m есть натуральное число, разность чиселъ b и a. Символъ $(o-m)$ условимся обозначать «$-m$» и будемъ его называть отрицательнымъ числомъ. Напр.: $(5-7)=(0-2)=-2$.

Въ случаѣ $a=b$, $(a-b) = (o-o)$.

Символъ $(o-o)$ условимся считать тожественнымъ символу o.

Въ случаѣ a кратнаго b, $\frac{a}{b}=\frac{m}{1}$, гдѣ m есть натуральное число, частное отъ дѣленія a на b. Символъ $\frac{m}{1}$ условимся считать тожественнымъ натуральному числу m. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ симвомъ $\frac{a}{b}$ представляетъ собою натуральное число.

Въ случаѣ a не кратнаго числа b, символъ $\frac{a}{b}$ будемъ называть дробью; если a и b имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d, не равнаго единицѣ, такъ что $a=a_1 d$ и $b=b_1\ d$, то $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, гдѣ a_1 и b_1 суть числа первыя между собой. Символъ $\frac{a_1}{b_1}$ будемъ называть несократимой дробью.

Въ случаѣ $a=b$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$. Символъ $\frac{1}{1}$ условимся считать тожественнымъ символу 1.

Сравнимъ символъ $\frac{a}{b}$ съ символомъ $\frac{1}{1}$; $\frac{a}{b} < \frac{1}{1}$, если $a \,.\, 1 < b \,.\, 1$ или, если $a < b$ — въ этомъ случаѣ символъ $\frac{a}{b}$ называется правильной дробью, если же $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$ и символъ $\frac{a}{b}$ назыв. неправильной дробью.

Символъ $\frac{o}{b}$ условимся считать тожественнымъ символу o.

Символу $\frac{b}{o}$ никакого ариѳметическаго значенія не придается.

4) Операція сложенія паръ чиселъ вида $(a-b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, имѣемъ: $(a-b)+(c-d)=$ $=(a+c)-(b+d)$. Это тожество примемъ, **какъ опредѣленіе** суммы паръ чиселъ $(a-b)$ и $(c-d)$:

$$(a-b)+(c-d)= \\ =[(a+c)-(b+d)]$$

4) Операція сложенія паръ чиселъ вида $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a и b кратныхъ m, имѣемъ: $(a:m)+(b:m)=$ $=(a+b):m$.

Опредѣленіе: суммой двухъ дробей $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ будемъ называть дробь $\frac{a+b}{m}$.

Эти опредѣленія должны быть **оправданы съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій**; для этого надо показать, что законы перемѣстительный и соединительный имѣютъ мѣсто при этихъ опредѣленіяхъ операціи сложенія.

Опредѣливъ операцію сложенія относительныхъ чиселъ надо показать, что $a-b$, въ случаѣ $a < b$, равно парѣ чиселъ $(a-b)$, для этого достаточно показать, что $b+$ $=(a-b)=a$.

Дѣйствительно: $(b-o)+$ $+(a-b)=[(b+a)-(o+b)]=$ $=[(b+a)-b]=(a-o)=a$.

Замѣтимъ, что вообще учитель долженъ проводить различіе между знакомъ «—» въ выраженіяхъ $a-b$ и $(a-b)$: въ первомъ случаѣ это знакъ дѣйствія вычитанія, во второмъ случаѣ это обозначеніе сочетанія натуральныхъ чи-

селъ a и b для образованія новаго символа, пары $(a—b)$. Для устраненія сбивчивости въ значеніи знака минусъ нѣкоторые авторы обозначаютъ пару чиселъ, отдѣляя числа этой пары запятой: (a, b).

5) Операція умноженія символовъ $(a—b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, имѣемъ: $(a—b)(c—d) = = (ac + bd) — (ad + bc)$.

Опредѣленіе: произведеніемъ паръ чиселъ $(a—b)$ и $(c—d)$ называется пара чиселъ, первый членъ которой равенъ натуральному числу $ac + bd$ и второй членъ— натуральному числу $ad + bc$.

5) Операція умноженія символовъ $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, имѣемъ: $(a : b) . (c : d) = ac : b : d$.

Опредѣленіе: произведеніемъ паръ чиселъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется пара чиселъ $\frac{ac}{bd}$, первый членъ которой равенъ произведенію первыхъ членовъ (числителей) данныхъ паръ и второй—произведенію вторыхъ членовъ (знаменателей) данныхъ паръ.

Это опредѣленіе должно быть оправдано съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій; для этого надо показать, что законы перемѣстительный, соединительный и распредѣлительный имѣютъ мѣсто при этомъ опредѣленіи операціи умноженія.

Исходя изъ общихъ опредѣленій сложенія и умноженія паръ чиселъ вида $(a—b)$, надо напомнить ученикамъ правила сложенія и умноженія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, пользуясь при этомъ и частными примѣрами.

Опредѣливъ операцію умноженія символовъ $\frac{a}{b}$, надо показать, что $a : b = \frac{a}{b}$, для этого достаточно убѣдиться въ томъ, что $\frac{a}{b} . b = a$.

Дѣйствительно: $\frac{a}{b} . \frac{b}{1} = \frac{a . b}{b} = \frac{a}{1} = a$.

Напримѣръ: сложеніе положительнаго числа съ отрицательнымъ

$(m-o)+(o-n)=[(m+o)-$
$-(o+n]=(m-n)$ если $m>n$, то $(m-n)$ есть число натуральное, если $m<n$, то $(m-n)$ есть число отрипательное.

$$8+(-11)=(8-0)+$$
$$+(0-11)=[(8+0)-$$
$$-(0+11)]=(8-11)=$$
$$=(0-3)=-3.$$

6) *Операціи вычитанія и дѣленія для паръ чиселъ вида* $a-b$ *и вида* $\frac{a}{b}$.

Свойства этихъ операцій вытекаютъ изъ ихъ опредѣленія, какъ операцій соотвѣтственно обратныхъ сложенію и умноженію и изъ законовъ этихъ послѣднихъ.

Законы операцій сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ остаются справедливыми и для вновь созданныхъ символовъ, а потому и всѣ свойства вычитанія и дѣленія тоже остаются для нихъ справедливыми. Такимъ образомъ, установлена общность тожественныхъ преобразованій для всей области раціональныхъ чиселъ.

11) *Ирраціональное число.* При изложеніи вопроса объ ирраціональномъ числѣ можно придерживаться или теоріи Дедекинда или теоріи Мере-Кантора.

Я имѣю опытъ изложенія въ классѣ теоріи ирраціональнаго числа, придерживаясь точки зрѣнія Дедекинда.

Это изложеніе я проводилъ по слѣдующей программѣ.

1) Исходя изъ частныхъ примѣровъ, я устанавливаю понятіе о сѣченіи всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса такъ, чтобы всякое число перваго класса было меньше всякаго числа второго класса. Число, какъ символъ сѣченія. Числа раціональныя и ирраціональныя, какъ частные случаи обобщеннаго понятія о числѣ.

2) Понятія «равно», «больше» и «меньше» для чиселъ, какъ символовъ сѣченія.
3) Опредѣленіе операцій сложенія и умноженія чиселъ, какъ символовъ сѣченія. Оправданіе этихъ опредѣленій съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій.
4) Операціи вычитанія и дѣленія, какъ операціи обратныя сложенію и умноженію.

Общность тожественныхъ преобразованій для всей области вещественныхъ чиселъ.

Опытъ показываетъ, что самымъ труднымъ въ изложеніи теоріи ирраціональнаго числа является моментъ ариѳметизаціи символа сѣченія. Ученики сочтутъ возможнымъ признавать символъ сѣченія за число лишь при томъ условіи, что они уже нѣсколько освоились съ абстрактнымъ понятіемъ о числѣ, освоились съ возможностью созданія, при соблюденіи опредѣленныхъ условій, новыхъ числовыхъ символовъ, исходя изъ понятія о числѣ натуральномъ. Поэтому я считаю существенно важнымъ обобщить въ послѣднемъ классѣ ученіе о числѣ, освѣтивъ это ученіе нѣкоторыми общими идеями и понятіями—безъ этого невозможно дать сколько-нибудь обоснованную теорію ирраціональнаго числа.

Можетъ быть точка зрѣнія Мере-Кантора, основанная на разсмотрѣніи правильныхъ послѣдовательностей раціональныхъ чиселъ, имѣющихъ или не имѣющихъ раціональный предѣлъ, имѣетъ нѣкоторое преимущество передъ теоріей Дедекинда. Это преимущество мнѣ представляется въ слѣдующемъ: понятіе о правильной послѣдовательности раціональныхъ чиселъ болѣе связано съ накопленными уже учениками ариѳметическими понятіями, чѣмъ понятіе о сѣченіи, съ которымъ приходится оперировать, становясь на точку зрѣнія Дедекинда; по крайней мѣрѣ, мнѣ при разработкѣ вопроса объ операціяхъ надъ числами, какъ символами сѣченія, приходилось прибѣгать къ понятію о правильной послѣдовательности раціональныхъ чиселъ въ интересахъ большей отчетливости понятій и ихъ зафиксированія въ видѣ болѣе удобныхъ и наглядныхъ записей.

Въ видѣ заключительной главы курса теоретической ариѳметики въ старшихъ классахъ, я считаю необходимымъ дать статью объ измѣреніи величинъ, устанавливающую соотвѣтствіе между числовыми символами и значеніями величины.

Въ заключеніе своего доклада считаю долгомъ обратить вниманіе Собранія, что на затронутые мною вопросы въ русской учебной литературѣ обращаетъ особое вниманіе нашъ уважаемый предсѣдатель, профессоръ А. В. Васильевъ его лекціи «Введеніе въ анализъ» оказались для меня неоцѣнимымъ пособіемъ въ практикѣ преподаванія.

А. В. Васильевъ въ своей рѣчи произнесенной имъ въ день открытія нашего Съѣзда обратилъ вниманіе собранія на необходимость проведенія при преподаваніи математики въ старшихъ классахъ нѣкоторыхъ обобщающихъ идей, имѣющихъ широкое общеобразовательное, философское значеніе. Мой опытъ построенія курса ученія о числѣ для старшаго класса средней школы пусть будетъ отвѣтомъ рядового преподавателя на призывъ уважаемаго профессора А. В. Васильева».

Пренія по докладу Б. Б. Піотровскаго.

А. І. Филипповъ (Могилевъ-Подол.). „Я хотѣлъ сказать нѣсколько словъ относительно опредѣленій, которыя введены докладчикомъ. Здѣсь говорилось относительно индуктивныхъ опредѣленій. Конечно, теоретическую ариѳметику можно строго обосновать только такимъ образомъ, но является вопросъ, понятны ли эти опредѣленія юношеству: мнѣ кажется, что совершенно непонятны. Надо постараться использовать эти опредѣленія не въ видѣ формулы, а изложить ихъ словесно. Какъ это сдѣлать? Существуетъ брошюра Волкова, гдѣ опредѣленіе суммы дается такимъ образомъ: суммой двухъ чиселъ $(a + b)$ называется b-*ое* число послѣ a. Это, конечно, можно пояснить сразу на примѣрѣ. Данъ, допустимъ, натуральный рядъ чиселъ. Что называется суммой двухъ чиселъ, напримѣръ, 3 и 4? Это будетъ четвертое число послѣ трехъ, т. е.

семь. Вотъ и все. Это опредѣленіе есть не что иное, какъ словесный переводъ формулъ: $a + 1 =$ слѣдующему числу послѣ a; $a + (b + 1) = (a + b) + 1$".

Т. Г. Соболевъ (Гжатскъ, Смол. губ.) высказалъ мысль, что при предлагаемомъ изложеніи будетъ порвано съ тѣми представленіями о числѣ и дѣйствіяхъ надъ числами, которыя уже имѣются у учениковъ. Переходъ отъ понятія о числѣ, какъ числѣ количественномъ, къ понятію о числѣ, какъ о числѣ порядковомъ, можетъ вызвать многія недоразумѣнія и во всякомъ случаѣ долженъ быть сдѣланъ въ высшей степени осторожно.

Е. Е. Кедринъ (Самара). „Мнѣ кажется совершенно невозможнымъ введеніе въ школу понятія о числѣ, какъ о символѣ. Этотъ взглядъ, введенный въ науку Гельмгольцемъ, остается еще и сейчасъ спорнымъ. Кромѣ того, опредѣленіе числа, какъ символа, является крайне неопредѣленнымъ, туманнымъ, такъ какъ опредѣляемое понятіе (число) выводится изъ понятія еще болѣе неяснаго и, такъ сказать, крайне расплывчатаго (символъ). Что въ данномъ случаѣ разумѣется подъ словомъ «символъ»? Я думаю, конечно, не цыфра и не имя числительное. Вѣдь тогда бы вышло, что число есть цыфра или слово. Съ этимъ согласиться нельзя, и, несмотря на громадный авторитетъ Гельмгольца, онъ, по моему мнѣнію, дѣлаетъ ошибку, смѣшивая символъ объекта съ самимъ объектомъ".

М. Н. Песоцкій (Тифлисъ). „Я вполнѣ присоединяюсь къ идеѣ, высказанной въ докладѣ. Эта идея не новая; этотъ методъ математической индукціи высказанъ еще Пуанкарэ. Но я бы хотѣлъ здѣсь сдѣлать дополненіе относительно того, чего такъ осторожно коснулся г. докладчикъ, а именно — относительно комплексныхъ чиселъ. По моему, слѣдовало бы ввести въ школу и ученіе о комплексныхъ числахъ. Затѣмъ, слѣдуетъ слегка познакомить и съ кватерніонами, потому что они имѣютъ громадное значеніе въ физикѣ. Они расширяютъ вообще идею о дѣйствіи съ точки зрѣнія не только ариѳметической, но и геометрической. Это имѣетъ большое значеніе для развитія міросозерцанія учениковъ".

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.). „Вношу фактическую поправку: ни въ VIII кл. гимназій, ни въ 7 кл. реальныхъ училищъ никакихъ задачъ по ариѳметикѣ не предлагается, причемъ изъ программы реальныхъ училищъ вовсе выкинуты не только тройное правило, правило смѣшенія и прочее, но даже и дроби (простыя и десятичныя). Въ виду этого, предложеніе докладчика использо-

вать время, потребное на изложеніе этихъ выкинутыхъ отдѣловъ, на введеніе ученія о числѣ является неосуществимымъ".

„Вполнѣ соглашаясь съ необходимостью замѣны всего настоящаго курса теоретической ариѳметики предлагаемымъ (съ введеніемъ комплексныхъ чиселъ и съ предпочтеніемъ метода Кантора методу Дедекинда), считаю необходимымъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе, не противорѣчащее мысли докладчика, что «требованіе всѣхъ выводовъ при отвѣтѣ не должно являться обязательнымъ». Изъ практики я убѣдился, что предлагаемый курсъ усваивается большинствомъ учениковъ, но изложеніе его (т. е. отвѣты учениковъ), требуя дара слова и исключительной точности въ выбираемыхъ выраженіяхъ, представляетъ для нихъ большія затрудненія".

„Въ виду сего я полагалъ бы возможнымъ допустить отвѣты учениковъ по конспектамъ, составленнымъ въ символической формѣ, безъ записи разсужденій".

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я боюсь, что положенія, высказанныя въ докладѣ, учителя станутъ проводить въ школу. 10 лѣтъ тому назадъ мнѣ въ первый разъ пришлось заинтересоваться вопросомъ о теоріи чиселъ и ариѳметическихъ дѣйствій и, заинтересовавшись, я сейчасъ все преподнесъ ученикамъ. Прошло два-три года, и мое мнѣніе по вопросу, который былъ изложенъ уважаемымъ г. Піотровскимъ, измѣнилось; я сталъ чувствовать, что эти вещи преподносить ученикамъ не слѣдуетъ: они займутся игрой въ логику. Повторяю если это ученіе будетъ введено въ старшіе классы средней школы, ученики не только будутъ скучать и не понимать объясненій, но даже не будутъ ихъ слушать".

М. Ѳ. Беръ (Москва), вполнѣ раздѣляя мнѣніе, высказанное докладчикомъ, находитъ предлагаемую имъ программу желательною.

С. Б. Шарбе (Екатеринославъ). „То, что было здѣсь изложено докладчикомъ, я излагалъ даже и не въ старшихъ классахъ, а въ самомъ началѣ преподаванія алгебры, и утверждаю, что опасаться этого курса нѣтъ основанія. Только тогда, когда ученикъ начнетъ понимать, какъ расширяется понятіе о числѣ, о дѣйствіи, онъ относительно созрѣлъ къ переходу отъ ариѳметики къ алгебрѣ".

„Кромѣ того, было бы въ высшей степени желательно, чтобы въ старшихъ классахъ останавливались не только на ирраціональныхъ, но и на мнимыхъ числахъ. Вспомнимъ, съ какимъ трудомъ человѣчество овладѣвало понятіемъ о числѣ; въ обобщенномъ видѣ; Эйлеръ, вводя отрицательныя числа, осторожно выражается

о нихъ, говоря, что они очень удобны для вычисленій; великій Гауссъ въ своей диссертаціи извиняется, что позволяетъ себѣ заниматься мнимыми числами. Для ученика современной намъ средней школы мнимыя числа не должны казаться чѣмъ-то спиритическимъ; ученики должны понять, что совокупность чиселъ отрицательныхъ, дробныхъ, раціональныхъ и комплексныхъ—есть одно цѣлое".

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.). „Я усматриваю два теченія на нашемъ Съѣздѣ. Во-первыхъ, теченіе, которое стремится облегчить начальное ученіе; во-вторыхъ, теченіе, которое старается перенести научные факты и выводы непосредственно въ среднюю школу. Я не вижу, какъ согласовать эти два теченія. Отъ конкретныхъ представленій надо осторожнымъ и медленнымъ путемъ переходить къ абстрактнымъ. Когда же въ младшихъ классахъ занимаются интуиціей, а въ старшихъ классахъ философіей, тогда очень можно опасаться, что интуиція и философія въ умахъ среднихъ или слабыхъ учениковъ столкнутся и не подѣлятъ поля сознанія. Примѣръ философіи и очень сложной далъ намъ г. Долгушинъ въ своемъ докладѣ. Онъ взялъ пучекъ круговъ, представилъ ихъ прямою линіею, взялъ другую систему круговъ и эти круги представилъ уже неэвклидовыми геодезическими линіями. Какъ прямыя не есть пучки, а пучки—не прямыя въ эвклидовомъ смыслѣ, такъ и круги не были неэвклидовыми геодезическими линіями: докладчикъ замѣнилъ символомъ реальные образы. Онъ говорилъ, что учащіеся съ чрезвычайнымъ интересомъ набрасываются на неэвклидову геометрію; но, вѣдь, ученики ничего не постигаютъ изъ этого: связь теоремъ представляется имъ не въ дѣйствительномъ видѣ, а лишь въ фиктивномъ, приспособленномъ къ легкости воспріятія".

„Въ Петербургѣ имѣется школа, гдѣ преподаются ариѳметическіе символы. Я присоединяюсь къ тѣмъ лицамъ, которые спрашивали здѣсь, что такое эти символы. Это то, что совершенно непохоже на то простое понятіе о числѣ, которое было сообщено ученикамъ въ младшихъ классахъ, и замѣняетъ его такъ же, какъ тѣ круги, которые были замѣнены прямыми линіями; вотъ что это. Такіе учителя какъ Грассманъ, которые примкнули къ этому изложенію, знали, что они дѣлаютъ. Они имѣли дѣло съ философіей, а въ философіи для нихъ было задачей отрѣзать, уничтожить всякую наглядность. Они истребили всѣ слѣды конкретности для того, чтобы оставить чистую логику, и производили логическія операціи, которыя пріобрѣтали особую красоту, чисто математическую, то, что́ они называютъ аксіоматикой. Ими была построена система логическаго сложенія, изображающая его какъ

систему формальныхъ правилъ, но это не была система сложенія реальныхъ чиселъ. Попытки заинтересовать интуиціей въ первыхъ классахъ и—совершенно безъ всякой связи—началами философіи въ послѣднихъ классахъ, представляютъ систему разорваннаго преподаванія, которое несомнѣнно представляетъ жесточайшее зло и, когда мы видимъ въ учебникахъ Билибина, что тамъ о раціональныхъ числахъ прямо говорится ученику младшаго класса, что это есть символъ, мы можемъ сказать, что подобное изложеніе абсолютно не выдерживаетъ критики. Въ среднюю школу можно вводить только элементы этого ученія, показывая, напр., какъ, исходя изъ того или иного положенія, переходить къ послѣдующимъ выводамъ; но этимъ надо и ограничиться".

Е. Д. Ханакадопуло (Одесса). „По новой программѣ кадетскихъ корпусовъ этотъ вопросъ уже введенъ въ школу, и я уже обладаю одногодичнымъ опытомъ въ этомъ направленіи. Я какъ разъ излагалъ учащимся этотъ курсъ и затрудненія я встрѣтилъ только въ томъ клубкѣ, откуда потомъ легко все развернуть; дальше все идетъ гладко. Но именно въ этомъ клубкѣ, въ аксіомѣ Грассмана — громаднѣйшее затрудненіе. Когда я предлагалъ ее ученикамъ и говорилъ: «примите ее, дальше все будетъ хорошо». ученики отвѣчали: «мы не можемъ съ этимъ опредѣленіемъ согласиться, ибо оно не согласуется съ тѣми опредѣленіями, которыя раньше у насъ были». И вотъ только во «Введеніи въ анализъ» Васильева я нашелъ то, что́ мнѣ было нужно. Это формула: $a+(b+1)=(a+b)+1$. Поэтому, если я къ a хочу прибавить 2, то это значитъ, что я хочу прибавить $1+1$. По этой аксіомѣ мнѣ кажется очевиднымъ, что это будетъ $a+1+1$".

В. Ѳ. Каганъ (Одесса). „Я не буду останавливаться на педагогической сторонѣ дѣла. Я думаю, учебное заведеніе учебному заведенію—рознь, классъ классу—рознь и преподаватель преподавателю—рознь. Когда преподаватель чувствуетъ, что его классъ подготовленъ для воспріятія этихъ идей, когда онъ чувствуетъ умѣніе и силы сдѣлать это ученикамъ объяснимымъ, когда онъ убѣжденъ, что онъ съумѣетъ сдѣлать такъ, что ученики, повторяя, не будутъ говорить заученныя вещи, то тогда это полезно. Но я взялъ слово для другой цѣли, для того, чтобы сказать о тѣхъ идеяхъ, которыя вложены въ систему Грассмана. Здѣсь раздавались голоса по поводу того, что изложенная система смотритъ на число, какъ на символъ, и лишаетъ числа ихъ реальнаго конкретнаго, жизненнаго значенія, къ которому мы привыкли и которое ученикъ принесъ съ собой изъ низшей школы. Идея, которая изложена г. Піотровскимъ, принадлежитъ Грассману. Формула Грассмана однако встрѣтила здѣсь возраженіе по существу, и надо

сказать, что тѣ голоса, которые здѣсь раздавались, имѣютъ основанія и на нихъ стоитъ остановиться".

„Идея Грассмана въ свое время была выдвинута въ наукѣ. Она приводитъ ариѳметическія цѣлыя числа въ извѣстный порядокъ; но тотъ, кто думаетъ, что Грассманъ узаконяетъ идею исчисленія и способы развитія ариѳметики до степени символовъ, заблуждается. Въ самомъ дѣлѣ, возьмите такую теорему Грассмана: «для того, чтобы къ числу a прибавить сумму n чиселъ, нужно прибавить n—1, а потомъ послѣднее число». Въ этой формулѣ: число n есть символъ специфицированный, или ему придано частное значеніе? Да и раньше, когда мы говоримъ: «возьмемъ 1-ое число, 2-ое число и затѣмъ составимъ 3-ье», то эта идея двухъ чиселъ фигурируетъ какъ символъ или имѣетъ содержаніе нѣкотораго ансамбля? Внѣ всякаго сомнѣнія, какъ бы намъ ни было пріятно сказать, что ариѳметика обоснована и проводится у Грассмана аксіоматичсски, это не будетъ справедливо. Вотъ что заставило въ послѣднее время Георга Кантора и др. стать на иную точку зрѣнія. Они начинаютъ съ другой идеи, съ идеи объ ансамбляхъ. Они хотятъ оживить тѣ идеи, которыя до нихъ претворили въ символы. Отсюда возникло другое теченіе въ теоріи ариѳметики. Если вы возьмете Вебера, то не найдете системы Грассмана, а другую, но эта система тоже оказалась, невыдерживающей критики: она не довела теорію до послѣдняго момента. Можно сказать, что теоріи ариѳметики, обоснованной до конца, мы до сихъ поръ не имѣемъ. Труднѣйшая часть ариѳметики, начиная съ дробей, идетъ благополучно до конца; ариѳметика же цѣлыхъ чиселъ до сихъ поръ считается необоснованной".

„Въ тѣсной связи съ этимъ находится другой вопросъ, стоящій на пути системы Грассмана, такъ сказать—у ея дверей. Г. Піотровскій прекрасно формулировалъ, въ чемъ заключается идея индуктивности Грассмановскихъ опредѣленій. Она заключается въ томъ, что если умѣешь прибавить b, то вмѣстѣ съ тѣмъ научаешься прибавить $b+1$; разъ я съумѣю прибавить число 2, то сумѣю прибавить число 3, и т. д. Но что вложено въ это «и т. д.»? Это «и т. д.» заключается въ законѣ математической индукціи, въ увѣренности, что, двигаясь этимъ путемъ по натуральному ряду, я дойду до любого числа. Спрашивается: это положеніе—коренное и исходное, или оно тоже можетъ быть подведено къ болѣе общимъ областямъ неариѳметическихъ идей? Отсюда тенденція — доказать самый законъ математической индукціи. Вопросъ въ томъ: если я буду двигаться черезъ эти интервалы,

дойду ли я до любой точки прямой, захвачу каждую точку этого ряда или нѣтъ?“

„Вы знаете, что уже великій геометръ древности Эвклидъ усмотрѣлъ эту логическую трудность и формулировалъ ее въ 7-ой книгѣ «Началъ». Положеніе, что, двигаясь равными шагами по прямой или по ариѳметическому ряду, можно перешагнуть черезъ любую точку, было давно формулировано въ видѣ основной аксіомы. Возникаетъ вопросъ: въ какой мѣрѣ этотъ законъ математической индукціи является основнымъ орудіемъ нашего мышленія, въ какомъ смыслѣ онъ является орудіемъ ариѳметики и общимъ достояніемъ логики. Въ этомъ отношеніи за послѣднее время были сдѣланы чрезвычайно глубокія изслѣдованія Веронезе, и другими. Удалось доказать, что мы можемъ строить совершенно аналогичные ряды такъ, чтобы, шествуя по нимъ, не перескочить черезъ любую точку, т. е. — можно построить рядъ такимъ образомъ, что къ нему Грассмановская ариѳметика не будетъ примѣнима. Грассмановскимъ принципомъ вы этой ариѳметики не построите. Это—такъ называемая, неархимедова ариѳметика, на которой строится неархимедова геометрія. Такимъ образомъ, вопросъ о томъ, гдѣ тѣ основныя положенія, на которыхъ можетъ быть построена ариѳметика цѣлыхъ чиселъ, еще виситъ въ воздухѣ, и въ наукѣ нельзя считать его рѣшеннымъ. Въ геометріи дѣло обстоитъ благополучно и ясно; но когда вы приступаете къ построенію ариѳметики, то у васъ нѣтъ предварительной базы. Эту общую логическую базу нужно еще установить въ наукѣ. Этимъ занимается въ настоящее время итальянская школа, но насколько удачно—вопросъ будущаго“.

А. В. Васильевъ (Спб.). „Въ докладѣ Піотровскаго нужно различать 2 части: первую часть, которая составляетъ главу изъ ариѳметической теоріи цѣлыхъ чиселъ и которая ведетъ къ установленію законовъ ассоціативности, коммутативности и дистрибутивности, и вторую часть, которая, исходя изъ этихъ законовъ въ логической связи, развиваетъ понятія объ обратныхъ операціяхъ, о дѣйствіяхъ надъ ними, о всей системѣ алгебры и обобщенія чиселъ путемъ обратныхъ операцій. Что касается второй части, то мы не слышали никакихъ возраженій противъ такого объединенія понятій алгебры. Что касается того, какъ приходятъ къ законамъ ассоціативности и дистрибутивности для цѣлыхъ чиселъ, то тутъ есть два пути: путь Грассмана и путь, основанный на однозначномъ соотвѣтствіи и мощности. Какой путь избрать, это дѣло педагога. Въ лекціяхъ по введенію въ анализъ, которая была упомянута, эти двѣ точки зрѣнія предлагаются мною студентамъ I курса, какъ однозначущія, потому что вдаваться въ

тонкости, о которыхъ сообщилъ В. Ѳ. Каганъ и которыя составляютъ предметъ обсужденія и математиковъ и философовъ, на первомъ курсѣ невозможно, тѣмъ болѣе это невозможно въ 8-мъ классѣ гимназіи".

„На вторую часть доклада я просилъ бы обратить больше вниманія. Дѣйствительно желательно, чтобы ученикъ послѣдняго класса гимназіи подобно тому, какъ онъ получаетъ понятіе о строго обоснованной системѣ Эвклида на основаніи небольшого числа посылокъ, имѣлъ понятіе о томъ, что и вся алгебра — отъ цѣлыхъ чиселъ до комплексныхъ включительно — представляетъ собой логическое развитіе сравнительно небольшого числа основныхъ посылокъ. Я думаю, что это нужно, потому что убѣдился во время моей университетской дѣятельности, имѣя соприкосновеніе со многими гимназистами, приходящими на первый курсъ математическаго факультета, что этихъ основныхъ законовъ они не знаютъ".

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Мнѣ, конечно, очень трудно исчерпывающимъ образомъ отвѣтить на всѣ тѣ замѣчанія, которыя были здѣсь высказаны по поводу моего доклада и за которыя я прежде всего приношу благодарность Собранію. Я отвѣчу на тѣ изъ вопросовъ, затронутыхъ моими оппонентами, которые я считаю особенно существенными".

„Что касается до отвлеченности символовъ, то я признаю эту отвлеченность, но думаю, что врядъ ли можно безъ нея обойтись, разъ мы хотимъ сколько-нибудь обоснованно говорить о числѣ и о расширеніи этого понятія. Въ отвлеченіяхъ и обобщеніяхъ сила и красота математики. Можно говорить конкретно о соединеніи трехъ яблокъ и пяти яблокъ въ одну совокупность, но нельзя говорить конкретно объ операціи сложенія чиселъ 3 и 5—это вопросъ совершенно отвлеченный по существу. По поводу замѣчанія В. Ф. Кагана, долженъ сказать, что понятіе о рядѣ натуральныхъ чиселъ и опредѣленіе операціи сложенія символовъ этого ряда устанавливаются совершенно независимо отъ понятія о численности совокупности предметовъ. Понятіе о численности совокупности предметовъ является результатомъ установленія однозначнаго соотвѣтствія между элементами совокупности и символами ряда натуральныхъ чиселъ. По поводу вопроса, который былъ сейчасъ ко мнѣ обращенъ: «какъ я могу сложить $\mathfrak{b}+1$, если я не знаю, что такое единица и что такое сложеніе», отвѣчу слѣдующее: символомъ 1 есть тотъ символъ, съ котораго начинается рядъ натуральныхъ чиселъ. Подъ $\mathfrak{b}+1$ условимся разумѣтъ число непосредственно слѣдующее за числомъ $\mathfrak{b}$ въ ряду натуральныхъ чиселъ, а такъ какъ за каждымъ членомъ этого ряда слѣдуетъ

одно и только одно число, то символъ $b+1$ является вполнѣ опредѣленнымъ числомъ и слѣдовательно нѣтъ больше основанiй меня спрашивать: «что такое $b+1$".

„По поводу оторванности этого курса отъ курса предыдущихъ классовъ, на которую обращали вниманiе мои оппоненты, я скажу, что считаю совершенно необходимымъ, установивъ понятiе о числѣ, какъ отвлеченномъ символѣ, и установивъ формальное опредѣленiе операцiи, связать эти понятiя съ понятiемъ о численности предметовъ и съ понятiемъ объ измѣренiи значенiй величины, на что и имѣются указанiя въ предлагаемой мною программѣ курса теоретической ариѳметики. Нельзя не считаться, самымъ серьезнымъ образомъ, съ вопросомъ о самодѣятельности учащихся, но я полагаю, что эта самодѣятельность можетъ быть использована и въ предлагаемомъ мною курсѣ, напримѣръ, въ видѣ самостоятельнаго примѣненiя метода математической индукцiи, въ видѣ самостоятельнаго доказательства нѣкоторыхъ тожествъ, исходя изъ законовъ операцiй, въ видѣ активной работы учениковъ при разработкѣ въ классѣ различныхъ вопросовъ, связанныхъ общей идеей, наконецъ, въ видѣ тѣхъ сомнѣнiй, запросовъ, которые возникаютъ у учащихся послѣ того, какъ они будутъ введены въ кругъ широкихъ, обобщающихъ идей. Надо замѣтить, что активное участiе учениковъ въ работѣ не столько зависитъ отъ программы, сколько отъ учителя".

„А. Н. Шапошниковъ говорилъ, что въ младшихъ классахъ все стараются преподавать легко, а въ старшихъ классахъ за то наваливаютъ и теоретическую ариѳметику, и систему Эвклида и т. д. Конечно, курсъ долженъ быть построенъ планомѣрно. Сѣмена тѣхъ всходовъ, которые предполагается собрать въ результатѣ обученiя, въ послѣднемъ его концентрѣ, должны быть заброшены раньше. О легкости обученiя говорить не приходится — на каждой ступени обученiя преодолѣваются свои трудности Если отвлеченныя понятiя преподнести ученикамъ 3—4-го класса, то это никуда не годится, но если въ 7-мъ классѣ ограничиваться той же строгостью и степенью отвлеченiя, что и въ 3-мъ классѣ, то это тоже никуда не годится."

Предсѣдатель. „Изъ пренiй, я думаю, выяснилось, что средняя школа несомнѣнно нуждается въ болѣе точномъ обоснованiи ариѳметики, чѣмъ это было до сихъ поръ, но съ другой стороны, выяснилось, какiя трудности на этомъ пути стоятъ даже съ научной стороны. Поэтому, къ вопросу о развитiи понятiя о числѣ въ средней школѣ нужно отнестись съ большой осторожностью, и тѣмъ болѣе приходитъ это въ голову, когда вспоминаешь тѣ

пожеланія, которыя были высказаны на Съѣздѣ; напримѣръ, хотятъ ввести философскую пропедевтику, исторію математики. неэвклидову геометрію. Нужно подумать и объ ученикѣ".

„Затѣмъ, я сдѣлаю поправку къ сказанному однимъ лицомъ что будто бы въ корпусахъ введена Грассмановская аксіоматика. Ничего подобнаго въ корпусахъ не введено".

XIII. Игры и занятія, способствующія развитію образнаго мышленія и представленія.

Докладъ А. П. Смирнова (Спб.).

«Существуетъ общераспространенное мнѣніе, что математика развиваетъ ясность мышленія. Это положеніе несомнѣнно вѣрно, если оно относится къ математикѣ на высшихъ ступеняхъ обученія; но имѣя дѣло со школьниками въ предѣлахъ начальнаго и средняго обученія, мы видимъ обратное, тамъ математика требуетъ предварительнаго развитія образнаго мышленія и представленія. Съ этой цѣлью и вводится рядъ вспомогательныхъ средствъ въ видѣ различныхъ наглядныхъ учебныхъ пособій. Мы часто наблюдаемъ, что въ очень простыхъ для преподавателя вопросахъ учащіеся путаются: напр., при изученіи геометріи, переставляя буквы, обозначающія вершины угловъ треугольниковъ, мы сбиваемъ учащихся. Происходитъ это потому, что ученики не имѣютъ яснаго представленія о томъ, что скрывается за этими буквами, не имѣютъ представленія о формѣ.

Говорятъ, что начертательная геометрія развиваетъ представленіе о предметахъ 3-хъ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что геометрію изучаютъ и понимаютъ въ средней школѣ только тѣ лица, которыя имѣютъ ясное представленіе объ этихъ тѣлахъ уже заблаговременно. Не менѣе важно и въ ариѳметикѣ имѣть ясное образное представленіе. Многія задачи, которыя дѣти рѣшаютъ съ величайшимъ трудомъ, могли бы рѣшаться совершенно просто, если бы у дѣтей

имѣлось ясное пространственное представленіе. Напр., мы имѣемъ часто дѣло съ задачами, гдѣ въ извѣстный сосудъ вливается столько-то воды и проведены такія-то трубы. Лица, не имѣющія яснаго представленія о діаметрахъ, не могутъ перенести это на цифры, и въ результатѣ цифры расходятся съ дѣйствительностью. При изученіи въ высшихъ классахъ тригонометріи и началъ астрономіи необходимо ясное пространственное представленіе для того, чтобы понять, какимъ образомъ вычисляется движеніе земли, затменія луны и солнца. Нужно ясно представлять себѣ тѣ плоскости, въ которыхъ это происходитъ. Нѣтъ этого представленія о плоскости, поверхности—и нѣтъ яснаго рѣшенія, яснаго отвѣта на вопросы. Не менѣе необходимо ясное представленіе пространственныхъ формъ и въ повседневной жизни. Мы очень часто рѣшаемъ сложные вопросы на словахъ, отвлеченно, а какъ только приходится привести въ исполненіе наши предположенія, особенно касающіяся пространственныхъ отношеній, на сцену является полная несостоятельность.

Чтобы развить образное мышленіе, нужно съ самаго младшаго возраста использовать способность дѣтей изображать графически свои мысли и представленія. Нужно итти на встрѣчу всѣмъ способностямъ дѣтей, которыя даютъ имъ возможность развивать незамѣтно для себя почву для того, чтобы впослѣдствіи вѣрно и благополучно проходить курсъ средней школы. Необходимыми средствами для развитія пространственныхъ представленій у дѣтей, по моему мнѣнію, являются: рисованіе, черченіе и лѣпка; это именно тѣ способы передачи мыслей и впечатлѣній, которые свойственны ребенку самаго младшаго возраста. Этими способами ребенокъ начинаетъ говорить такъ же какъ словами—несовершенно, но понятно для себя, и задача воспитателя, подготовляющаго дѣтей въ школу, должна заключаться въ томъ, чтобы эти прирожденныя способности человѣка расширить возможно больше.

Вмѣстѣ съ рисованіемъ, черченіемъ и скульптурными работами необходимо также ввести ручной трудъ во всѣхъ его формахъ. Я не говорю о томъ ручномъ трудѣ, который проводится многими учебными заведеніями и который не удовлетво-

ряетъ ни ремесленника, ни педагога. Я говорю о такомъ ручномъ трудѣ, гдѣ рука совмѣстно съ мыслью создаетъ предметы, сопоставляетъ различныя формы пространства и даетъ тотъ или иной результатъ въ видѣ готовой вещи или произведенія. Здѣсь я не говорю о спеціальныхъ пріемахъ того или иного ремесла. Желательно, чтобы въ самомъ младшемъ возрастѣ дѣти могли работать не только на отвлеченной плоскости, сопоставляя между собой буквы и цифры, но могли бы воспроизводить отвлеченныя представленія въ видѣ какихъ-нибудь предметовъ; Въ этомъ отношеніи ручной трудъ сдѣлалъ большіе шаги впередъ, и было бы непростительной педагогической ошибкой, если бы мы оставили въ сторонѣ это могущественное средство пониманія и не воспользовались бы имъ для общаго развитія ученика. въ настояшее время рисованіе, черченіе и лѣпка вводятся постепенно во всѣ учебныя заведенія и встрѣчаютъ менѣе противниковъ, чѣмъ встрѣчали до сихъ поръ, но вмѣстѣ съ тѣмъ нужно научить не только рисовать карандашемъ, лѣпить изъ глины, но нужно научить владѣть пальцами рукъ, чтобы дѣти могли выпиливать, склеивать, строить, и когда эти занятія будутъ введены въ видѣ подготовительныхъ упражненій до школы, то можно надѣяться, что наши учащіеся войдутъ въ школу съ широкимъ кругозоромъ, съ развитымъ образнымъ мышленіемъ и, такимъ образомъ, легче будутъ усваивать истины, которыя въ настоящее время являются имъ чуждыми, отвлеченными.

Я не буду указывать тѣхъ пособій и руководствъ, которыя могутъ быть для этого использованы, это—дѣло воспитателей, учителей; пособій очень много, среди нихъ есть хорошія, плохія и посредственныя, но ихъ можно расположить въ извѣстной послѣдовательности. Въ первую очередь я предложилъ бы въ ручномъ трудѣ всевозможныя издѣлія изъ бумаги, причемъ эти издѣлія должны воспроизводить предметы 3-хъ измѣреній, а не только на плоскости. Слѣдовательно, они должны состоять не въ одномъ плетеніи, связываніи, но и въ воспроизведеніи различныхъ предметовъ дѣйствительности. Слѣдующей ступенью могутъ быть различныя игры, напр., въ кирпичики, когда ребенокъ беретъ предметы извѣстной формы и изъ этихъ формъ, сопоставляя ихъ между собой, созидаетъ новыя. Наконецъ, на послѣдней ступени под-

готовительныхъ игръ и занятій могли бы итти такія игры и занятія, которыя требуютъ извѣстной технической ловкости по складыванію, свинчиванію и склеиванію различныхъ предметовъ.

Было бы очень долго убѣждать васъ въ томъ, что подобныя занятія нужны или не нужны, но я высказываю свое мнѣніе, какъ представителя графическаго искусства, что было бы весьма желательно, чтобы преподаватели другихъ предметовъ, въ томъ числѣ и математики, отнеслись съ должнымъ вниманіемъ или, по крайней мѣрѣ, съ любопытствомъ къ этому предмету и внесли нѣкоторыя поправки и коррективы».

Тезисы.

1. Развитіе образнаго мышленія и представленія является необходимою частью общаго образованія.

2. Образное представленіе необходимо для яснаго и правильнаго пониманія окружающихъ явленій.

3. Образное представленіе открываетъ человѣку особую область мышленія, мало развиваемую другими дисциплинами.

4. Образное мышленіе слѣдуетъ развивать въ дѣтяхъ съ самаго младшаго возраста посредствомъ соотвѣтствующихъ игръ, занятій ручнымъ трудомъ, рисованія, черченія и лѣпки.

Конспектъ.

§ 1. Необходимость наглядности, образнаго мышленія и представленія для яснаго пониманія нѣкоторыхъ отдѣловъ математики, какъ напр.:

а) геометріи (планиметріи и стереометріи),

б) начертательной геометріи,

в) ариѳметики,

г) тригонометріи,

д) астрономіи.

§ 2. Значеніе яснаго представленія и образнаго мышленія преимущественно о формахъ, въ практической жизни.

§ 3. Необходимость содѣйствовать развитію въ дѣтяхъ

образнаго мышленія и представленія съ самаго младшаго возраста.

§ 4. Ручной трудъ, какъ одно изъ средствъ развитія образнаго мышленія и представленія:

а) современное положеніе ручного труда въ нашей школѣ,
б) желательная постановка преподаванія ручного труда въ цѣляхъ общаго развитія.

§ 5. Нѣкоторые изъ существующихъ въ настоящее время игръ, занятій и видовъ ручного труда, имѣющихъ цѣлью развить образное мышленіе и представленіе, напр.:

а) рисованіе (Прангъ и др.),
б) лѣпка (изъ глины, пластицына Гарбутта и др.),
в) вырѣзываніе изъ бумаги (Кохъ, Ручн. трудъ и др.),
г) складываніе построекъ, машинъ и т. п. (Матадоръ, Меккано).

XIV. Наглядныя пособія.

Докладъ Д. Э. Теннера (Спб.).

«Принципъ наглядности въ дѣлѣ преподаванія такъ твердо стоитъ въ педагогикѣ, что казалось бы о немъ нечего и говорить, но если мы обратимся къ исторіи этого вопроса и къ тому, какъ онъ трактуется теперь, то, мнѣ кажется, придемъ къ другому заключенію, потому что осуществленіе этого принципа весьма и весьма разнообразно, и еще спорятъ о томъ, въ какой мѣрѣ и насколько принципъ наглядности въ томъ или иномъ предметѣ можно проводить. Всѣ столпы педагогіи: Амосъ Коменскій, Д. Локкъ, Песталоци, Руссо Спенсеръ и т. д., всѣ въ одно слово говорятъ, что наглядность въ обученіи необходима; но сходясь въ этомъ общемъ принципѣ, они однако же расходятся въ способахъ его осуществленія. Такъ, Руссо широко открываетъ двери природы своему «Эмилю» и думаетъ, что сама природа будетъ служить ему нагляднымъ пособіемъ; Амосъ Коменскій вводитъ учениковъ въ классъ, создаетъ тамъ спеціальную обстановку, благопріятную для нагляднаго обученія.

Это съ одной стороны; съ другой же—въ преподаваніи

различныхъ предметовъ не въ одинаковой степени пользуются наглядными пособіями: въ однихъ, какъ естествознаніе, географія, такъ сказать, шага нельзя ступить безъ наглядныхъ пособій; въ другихъ—пользуются ими въ значительно меньшей степени, но все же и преподаватель исторіи, и родного языка и иностранныхъ языковъ вводятъ на своихъ урокахъ наглядныя пособія.

Географъ, естественникъ, историкъ должны пользоваться наглядными пособіями тамъ, гдѣ надо познакомить съ новымъ видомъ явленій природы, жизни человѣка, жизни животныхъ, развитіемъ растенія, съ историческими памятниками искусствъ, съ картинами, воспроизводящими историческія событія, нравы, и тому подобными фактами, ибо иногда невозможно никакими словесными объясненіями дать понятіе о томъ, что легко дается простымъ наблюденіемъ. Преподаватель родного языка, разучивъ въ классѣ поэтическое произведеніе, дополняетъ, если это возможно, зрительными впечатлѣніями отъ картины художника. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ роль нагляднаго пособія уже нѣсколько иная. Въ первомъ случаѣ безъ нагляднаго пособія почти невозможно вызвать нужное представленіе, во второмъ—поэтическій образъ уже составился путемъ чтенія, а произведеніе кисти художника лишь дополнитъ его, установитъ и закрѣпитъ связь между зрительнымъ и слуховымъ впечатлѣніями, вмѣстѣ съ тѣмъ способствуя запоминанію образовъ.

И въ томъ и въ другомъ случаѣ происходитъ накопленіе представленій—ростъ апперцепирующей массы, объемъ которой вліяетъ какъ на качество ассоціацій, такъ и на эмоціональную сторону воспріятія.

Въ преподаваніи математики также отводится мѣсто наглядности, но надо сказать, что въ этомъ отношеніи не всѣ школы находятся въ одинаковыхъ условіяхъ. Въ начальной школѣ, какъ всѣмъ извѣстно, преподаваніе математики сопровождается употребленіемъ наглядныхъ пособій, при чемъ дѣти съ одной стороны знакомятся съ геометрическими образами, съ пространственными соотношеніями, съ другой—съ числомъ, съ дѣйствіями надъ числами, законами этихъ дѣйствій и т. д. Здѣсь узнаются и новые факты и иллюстрируются уже из-

вѣстныя положенія, устанавливаются ассоціаціи, пріобрѣтаются навыки и т. д.

Необходимость наглядныхъ пособій въ начальномъ обученіи математикѣ признается уже всѣми; что касается до среднихъ и высшихъ ступеней обученія, то тутъ введеніе наглядныхъ пособій при обученіи математическимъ предметамъ становится все болѣе ограниченнымъ и спорнымъ. Непосредственныя наблюденія, простой опытъ и простые выводы изъ конкретныхъ фактовъ—вотъ область, доступная пониманію дѣтей въ возрастѣ, отвѣчающемъ начальному обученію. Способность къ отвлеченнымъ разсужденіямъ еще мало доступна этому возрасту.

По мѣрѣ обученія, вмѣстѣ съ возрастомъ психическія силы растутъ, способность къ отвлеченному мышленію развивается, необходимость въ конкретизаціи обученія уменьшается. Вмѣстѣ съ тѣмъ запасъ представленій и образовъ, вынесенныхъ изъ предшествовавшаго обученія растетъ и создается все большая возможность опираться при обученіи на этотъ запасъ. Вотъ однѣ изъ причинъ, лежащихъ въ законѣ развитія психической организаціи человѣка, которыя могутъ быть указаны, какъ позволяющія ограничивать употребленіе наглядныхъ пособій на высшихъ ступеняхъ обученія, по сравненію съ низшими. Замѣтимъ однако же, что рѣчь можетъ быть лишь объ ограниченіи, но не объ исключеніи наглядныхъ пособій.

Дѣйствительно, развитіе способности къ отвлеченному мышленію не исключаетъ значенія наглядныхъ пособій, а переноситъ лишь потребность въ нихъ, въ новыя болѣе сложныя области. Какъ бы ни былъ ученикъ знакомъ съ кубомъ, тѣмъ не менѣе, врядъ ли можно ожидать отъ него, чтобы онъ ясно себѣ представилъ, что сѣченіе его плоскостью можетъ дать треугольникъ, четырехугольникъ, пятиугольникъ и шестиугольникъ. Если онъ справился съ этимъ, можно идти далѣе и выяснить всѣ ли эти многоугольники могутъ быть правильными и т. д. Сѣченіе плоскостью, наклонной къ высотѣ правильной многогранной пирамиды, дастъ во всѣхъ случаяхъ не симметричный относительно точки многоугольникъ, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ симметричный относительно оси. Между тѣмъ, какъ сѣченіе конуса такой же плоскостью, даетъ фигуру

симметричную относительно точки и двухъ осей во всѣхъ случаяхъ, за однимъ лишь всѣмъ извѣстнымъ исключенiемъ.

Всѣ эти вопросы, конечно, могутъ быть выяснены и безъ наглядныхъ пособiй, чисто умозрительнымъ путемъ. Но помимо того, что путь этотъ не всегда простъ, умозрительное изслѣдованiе оставляетъ открытымъ вопросъ о реальныхъ представленiяхъ, связанныхъ съ изслѣдуемымъ вопросомъ. Не только тамъ, гдѣ въ обученiи переходятъ къ новымъ областямъ знанiй, ранѣе не затронутымъ, приходится обращаться къ нагляднымъ пособiямъ, но и въ томъ случаѣ, когда остаются въ знакомой области, когда въ предшествовавшемъ курсѣ заложены уже зерна того, что должно разрастись въ слѣдующихъ концентрахъ.

Ни въ какомъ случаѣ нельзя указать того момента, когда запасъ наглядныхъ представленiй исчерпывающе достаточенъ.

Если въ первомъ концентрѣ даны наглядныя представленiя объ измѣненiи простѣйшихъ функцiй, можно ли ожидать, что въ дальнѣйшемъ изученiи функцiи достаточно будетъ лишь одного аналитическаго ихъ изслѣдованiя безъ чертежа, готоваго или исполненнаго самимъ ученикомъ. Думаю, что нѣтъ, и вотъ почему. Одной изъ цѣлей преподаванiя математики является воспитанiе пониманiя функцiональной зависимости, выраженной аналитически, однимъ изъ средствъ для достиженiя такого пониманiя является графическое изображенiе той же зависимости. И ошибочно было бы, стремясь къ опредѣленной цѣли, избирать прiемъ осуществляющiй цѣль средствомъ ея достиженiя. Графическое изображенiе зависимости даетъ намъ картину измѣненiй функцiй на большомъ протяженiи, создать такую же картину исключительно аналитическимъ изслѣдованiемъ функцiй возможно послѣ большого числа упражненiй, связывающихъ аналитическое изслѣдованiе съ графическимъ изображенiемъ функцiй.

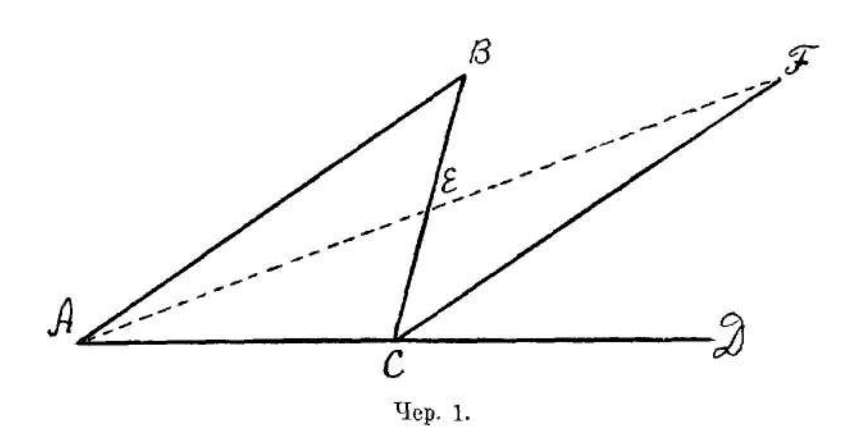
Какъ на другую причину, ограничивающую употребленiе наглядныхъ пособiй, можно указать на характеръ математическихъ наукъ, отраженiемъ которыхъ являются преподаваемые въ школѣ предметы. Чтобы выяснить, насколько съ этимъ нужно считаться, отмѣчу хотя бы нѣкоторыя задачи математики, какъ напримѣръ, установленiе и обосновыванiе законовъ

дѣйствій надъ числами, развитіе понятія о числѣ, расширеніе его за предѣлы цѣлыхъ чиселъ, установленіе пространственныхъ соотношеній, построеніе извѣстной системы, логически вытекающихъ другъ изъ друга предложеній и т. д. Задача школы соотвѣтственно этому заключается въ томъ, чтобы научить ученика логически мыслить и дать ему пространственныя представленія, познакомить съ развитіемъ понятія о числѣ, съ законами дѣйствій и т. д. При обсужденіи этой причины нужно расчленить ее на 2 части: къ первой части нужно отнести то, что касается знакомства съ числомъ, съ дѣйствіями надъ нимъ, функціями и т. п., а къ другой отнести пространственныя соотношенія.

Характеръ науки о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними не требуетъ, вообще говоря, того, чтобы за ея выводами не стояли пространственные образы, а напротивъ того, пространственные образы способствуютъ не только уясненію законовъ дѣйствія надъ числами, но и обобщенію значенія численныхъ соотношеній. Стоитъ лишь установить, что объемъ куба выражается кубомъ числа, измѣряющаго длину его ребра, а объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту, какъ получаемъ непремѣнное слѣдствіе, что кубъ, ребро котораго равно суммѣ двухъ отрѣзковъ, равновеликъ суммѣ объемовъ кубовъ, построенныхъ на каждомъ изъ отрѣзковъ и утроенныхъ объемовъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ и т. д. Никакая таблица не дастъ такого яснаго представленія о скорости возростанія показательной функціи, хотя бы $y=x^2$, какъ соотвѣтствующій ему графикъ. Ясное представленіе о скорости возрастанія членовъ геометрической прогрессіи требуетъ облеченія въ конкретную форму. Законы ариѳметическихъ и алгебраическихъ дѣйствій прекрасно иллюстрируются геометрическими образами. Къ этому надо добавить, что установленіе такихъ соотношеній способствуетъ болѣе прочному запоминанію, устанавливая связь между зрительными образами и численными тождествами.

Отсутствіе наглядныхъ пособій при изученіи свойствъ пространства и протяженій можетъ повести къ искаженію пространственныхъ представленій, если наглядныя пособія не будутъ представлены въ пространствѣ того измѣренія, въ ко-

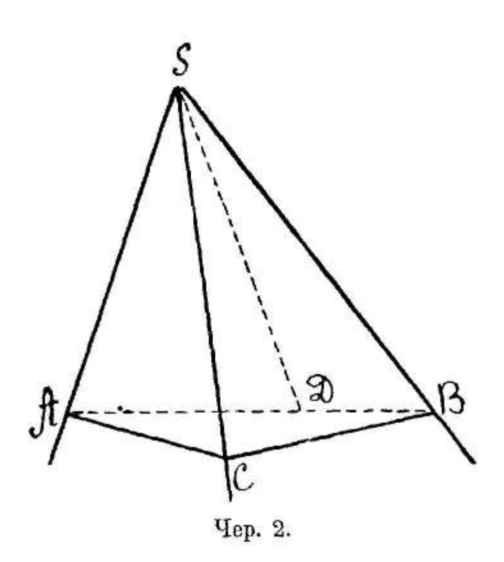
торомъ они изучаются; такъ напримѣръ, имѣя постоянно дѣло съ чертежами, изображающими на плоскости тѣла трехъ измѣреній, можетъ получиться такой эффектъ: ученикъ любую теорему доказываетъ вамъ на чертежѣ манипулируя съ элементами его, какъ съ символами подчиняющимися нѣкоторымъ законамъ, не имѣя однако же никакихъ ассоціацій пространственныхъ, съ нимъ связанныхъ. Въ такъ называемомъ проэкціонномъ черченіи основною теоремою является опредѣленіе длины отрѣзка по его проэкціямъ на 2-хъ плоскостяхъ. Если характеръ движенія проэкцій концовъ отрѣзка при поворотѣ вокругъ оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проэкцій, установленъ безъ наглядныхъ пособій и усвоенъ лишь какъ извѣстнаго рода чертежный пріемъ, то весь от-



Чер. 1.

дѣлъ о поворотѣ фигуръ, тѣлъ, опредѣленій сѣченій и т. д. будетъ представлять изъ себя лишь чертежную, механически воспроизводимую манипуляцію, и воспитанному исключительно на чертежѣ ученику не будетъ рѣзать глазъ такая ошибка, которая находится въ противорѣчіи съ пространственными представленіями. Вопросы симметріи относительно точки на плоскости смѣшаются съ симметріей относительно точки въ пространствѣ. Симметричные трехгранные углы и ихъ несовмѣстимость, дополнительные тѣлесные углы,—все это такого рода представленія, которыя надо связать не только съ чертежомъ на плоскости, но и съ изображеніями ихъ въ про-

странствѣ трехъ измѣреній, иначе разговоръ о такихъ вещахъ сведется къ словамъ безъ того конкретнаго содержанія, которое должно быть съ ними связано и, напротивъ того, содержаніе словъ будетъ искажено, заключая въ себѣ—какъ основной образъ—чертежъ на плоскости. Еще примѣръ: возьму двѣ теоремы: 1) внѣшній уголъ трехугольника больше внутренняго съ нимъ не смежнаго. Для доказательства проводятъ медіану AE, строятъ точку F, симметричную A, относительно точки E и все доказательство основываютъ на томъ, что точка A находится внутри угла BCD (чертежъ 1); 2) въ трехгранномъ углѣ сумма двухъ плоскихъ угловъ больше третьяго. Обычно доказательство ведется такъ: имѣемъ трехгранный уголъ $SABC$, пусть $ASB > ASC > BSC$ отложимъ ASC на ASB;



Чер. 2.

проведемъ AB, отложимъ $SC = SD$, соединимъ C съ A и D и такъ далѣе. Или ученикъ долженъ зазубрить именно это построеніе, или если не зазубритъ, то можетъ придумать свое, напримѣръ такое: отложимъ $SD = SC$ и проведемъ плоскость черезъ A, D и C, пусть эта плоскость пересѣчетъ ребро AB въ точкѣ B. Но тутъ учитель въ правѣ остановить ученика вопросомъ: почему вы знаете, что эта плоскость пересѣчетъ ребро AB. Чтобы разобраться въ вопросѣ ученику, понадобится ясное представленіе о томъ, каково возможное взаимное расположеніе плоскости и реберъ. Насколько въ первомъ случаѣ, гдѣ рѣчь

идетъ о трехугольникѣ и точкѣ, находящейся внутри внѣшняго угла, и гдѣ все доказательство рушится, если точки F не окажется внутри угла BCD, это интуитивное представленіе нужно подкрѣпить логическими соображеніями, настолько во 2-ой теоремѣ разсужденіе должно быть подкрѣплено интуитивными представленіями, иначе этотъ образъ будетъ чисто плоскостной и въ немъ ничего пространственнаго не будетъ заключаться. Словомъ, когда мы хотимъ достигнуть пониманія ученикомъ чертежа, нужно слѣдовать такому правилу: сопоставлять пространственные образы съ чертежами и не должно представлять чертежа совершенно обособленно. Только тогда связь между чертежомъ и пространственнымъ образомъ будетъ все болѣе и болѣе закрѣпляться.

До сихъ поръ, говоря о наглядности, мы разсматривали ее главнымъ образомъ съ точки зрѣнія накопленія запаса представленій, устанавливая соотношеніе между образами пространства одного измѣренія съ образами другихъ измѣреній.

Этимъ значеніе наглядныхъ пособій съ точки зрѣнія педагогической науки далеко не исчерпывается. Въ тѣсной связи съ вопросомъ о наглядности обученія стоитъ, конечно, вопросъ о возбужденіи произвольнаго и непроизвольнаго вниманія, о развитіи самодѣятельности учениковъ, о выработкѣ математическихъ идей, которыя согласно Гербарту не апріорны, а вырабатываются опытнымъ путемъ и т. п. Словомъ, тутъ имѣется цѣлый рядъ педагогическихъ требованій, пониманіемъ которыхъ обусловливается правильное употребленіе наглядныхъ пособій. При классномъ преподаваніи это пріобрѣтаетъ особо важное значеніе, потому что мы тамъ встрѣчаемъ учениковъ всевозможныхъ типовъ памяти и своеобразныхъ интересовъ. Это же имѣетъ значеніе при преподаваніи чисто индивидуальномъ. Употребленіе наглядныхъ пособій не всегда можетъ повлечь хорошіе за собой результаты. Возьмемъ крайность. Если преподаватель будетъ вести всѣ «доказательства» на наглядныхъ пособіяхъ, то это можетъ повести къ нежелательнымъ послѣдствіямъ. Наглядныя пособія не могутъ служить для доказательства, а служатъ лишь иллюстраціей, и это нужно всегда имѣть въ виду. Если мы знакомимъ учениковъ съ пріемомъ

доказательства путемъ совмѣщенія фигуръ и если мы ведемъ всѣ доказательства, накладывая въ дѣйствительности одну фигуру на другую, то тутъ мы совершаемъ совсѣмъ другую операцію по сравненію съ той, какая производится при умозрительномъ совмѣщеніи. Если въ одномъ случаѣ могутъ произойти ошибки оттого, что наши органы ощущенія недостаточно развиты, то въ другомъ случаѣ эти ошибки произойти не могутъ. Когда мы совмѣщаемъ 2 равныхъ отрѣзка, то говоримъ, что они совмѣщаются потому, что они равны, потому что это слѣдуетъ изъ опредѣленія равенства отрѣзковъ, между тѣмъ, когда совмѣщаемъ физическимъ образомъ, то говоримъ, что они равны, потому что совмѣстились.

Выдвигая важность знакомства съ педагогикой и психологіей, я думаю, что начинающіе преподаватели математики не обладаютъ имъ, потому что наши высшія учебныя заведенія, гдѣ большинство изъ насъ училось, не даютъ этой спеціальной подготовки, если не считать тѣхъ педагогическихъ кружковъ, которые существуютъ при высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, а между тѣмъ вопросъ о подготовкѣ учителей—одинъ изъ кардинальныхъ вопросовъ. Въ зависимости отъ него будетъ стоять и правильная постановка преподаванія математики и правильное употребленіе наглядныхъ пособій. Вопроса о подготовкѣ учителей я коснусь вскользь. Въ настоящее время какъ будто идея о необходимости подготовки учителя начинаетъ проникать глубоко въ массы, и дѣлаются нѣкоторыя попытки, чтобы вопросъ о подготовкѣ учителя среднихъ учебныхъ заведеній поставить правильно. Такъ, существуютъ курсы военно-учебнаго вѣдомства (9 л.), при округахъ появляются курсы для учителей среднихъ учебныхъ заведеній, возникаютъ нѣкоторыя учебныя заведенія по частной инипіативѣ (Педагогическая Академія, Шелапутинскій институтъ и т. д.) но этихъ послѣднихъ такъ немного, что говорить о серьезномъ вліяніи ихъ на преподаваніе вообще и на преподаваніе математики въ частности, врядъ ли возможно. Что касается курсовъ при округахъ, то постановка ихъ оставляетъ желать очень многаго, такъ какъ тамъ почти все сводится къ практикѣ, не дается почти никакой теоретической подготовки. Я не буду останавливаться на этомъ вопросѣ потому, что онъ послужитъ

темой для спеціальныхъ рефератовъ и тамъ будетъ развитъ подробно.

Выше уже упоминалось, что вопросъ о наглядности преподаванія—вопросъ старый, твердо-стоящій, въ теоріи безспорный и только на практикѣ колеблющійся довольно сильно.

Въ чемъ же заключается на практикѣ измѣненіе постановки вопроса о наглядности обученія въ новомъ направленіи?

Отличіе новаго направленія отъ стараго заключается въ желаніи провести принципъ активности въ пользованіе наглядными пособіями въ школѣ. Вопросъ о самодѣятельности учениковъ также не новъ, его касались Руссо, Кантъ, Спенсеръ, Гербартъ. Они говорятъ, что у ученика должно развивать самодѣятельность, инициативу, самобытность мысли. Современная психологія еще тѣснѣе захватываетъ эти вопросы. выдвигая психомоторные моменты, которые еще больше обусловливаютъ необходимость активнаго обученія не только съ точки зрѣнія облегченія пониманія и запоминанія, но и съ точки зрѣнія интереса, возбуждаемаго въ ученикѣ тѣмъ, что онъ самъ что-то дѣлаетъ, самъ творитъ.

Съ точки зрѣнія активности всѣ пособія можно раздѣлить на 2 класса: 1) тѣ пособія, которыя способствуютъ развитію активности ученика и 2) тѣ пособія, которыя обладаютъ пассивными свойствами. Пользованіе активными пособіями слагается изъ двухъ моментовъ—техническаго и геометрическаго. Для того, чтобы сдѣлать что-то, нужно не только обладать техническими пріемами, но и съумѣть выполнить геометрическое построеніе. Если задача состоитъ въ томъ, чтобы склеить какое-нибудь тѣло, то сперва надо вычертить его развертку, выклеить. Насколько тутъ доминирующее значеніе является за вычерчиваніемъ, а процессъ склеиванія простъ, настолько въ нѣкоторыхъ случаяхъ самъ процессъ производства столь сложенъ, что можетъ затмить всѣ математическіе элементы. Поэтому дѣло учителей, которые пользуются активными пріемами нагляднаго обученія, заключается въ томъ, чтобы наиболѣе ярко расчленить 2 момента: теоретическій отъ техническаго. Нужно, чтобы они не смѣшивались, нужно выдѣлить процессъ вычерчиванія въ смыслѣ геометрическомъ отъ техническаго.

Вообще собственно рукодѣліе должно имѣть мѣсто на-

столько, насколько это нужно для конкретизаціи изучаемаго вопроса, возбужденія интереса, вниманія и т. п.

Поэтому надо отнестись съ большой осторожностью къ тѣмъ пріемамъ проведенія принципа активности, гдѣ на первый планъ выступаетъ ручной трудъ.

Пособія, выставленныя на выставкѣ, какъ просвѣтительными учрежденіями такъ и торгующими фирмами могутъ быть раздѣлены на 2 группы: одни изготовлены въ законченномъ видѣ для иллюстрацій опредѣленныхъ теоремъ, мыслей, идей, другія состоятъ изъ отдѣльныхъ частей, комбинируя которыя можно создавать пособія для каждаго частнаго случая. Одни не носятъ въ себѣ никакой активности, другія вносятъ въ обученіе большую или меньшую долю активности. И тѣ и другія имѣютъ значеніе, и тѣ и другія можно найти на выставкѣ, напримѣръ тутъ есть пособіе Больта, пассивнаго типа, служащее для изученія теоремъ по стереометріи согласно опредѣленному учебнику, и пособіе Блюмеля, которое можетъ быть приспособлено не только къ любому учебнику, но и къ любой теоремѣ и къ рѣшеніе даже задачъ. Если при помощи Больта ученикъ ничего новаго не создастъ, то Блюмель отличается тѣмъ, что его не только можно показывать, но учитель можетъ дать приборъ въ руки ученику, и ученикъ можетъ скомбинировать то, что нужно, т. е. самъ построитъ образъ, который нуженъ. Здѣсь несомнѣнно вводится принципъ активности и вводится въ той формѣ, которая является желательной, но тѣмъ не менѣе отказываться отъ перваго рода пособій, которыя изготовлены для опредѣленной цѣли, нельзя. Такого рода пособіямъ мѣсто, главнымъ образомъ, въ педагогическихъ музеяхъ. Они будутъ наталкивать людей, которые будутъ съ ними знакомиться, на новыя мысли, новые пріемы иллюстрацій, они могутъ дать указанія на то, какимъ образомъ изъ такихъ пособій, какъ Блюмель, можно создать нѣчто приспособленное для опредѣленной цѣли. Поэтому въ учебныхъ заведеніяхъ на первомъ планѣ должны стоять тѣ пособія, при помощи которыхъ можно, комбинируя ихъ, получить тѣ или иныя построенія, что же касается до пособій, служащихъ для одной опредѣленной теоремы, то они могутъ быть въ болѣе ограниченномъ количествѣ. Такой под-

боръ пособій, мнѣ кажется, имѣетъ не только педагогическое, но и экономическое оправданіе.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пособія для опредѣленной теоремы развиваются въ цѣлую обширную группу, какъ напримѣръ, для Пиѳагоровой теоремы. Какъ извѣстно, способовъ доказательства этой теоремы множество и если посмотрѣть, что существуетъ въ этой области въ отношеніи наглядныхъ пособій, то увидимъ тутъ большое число пріемовъ доказательства этой теоремы, гдѣ на ряду съ пособіями, дѣйствительно уясняющими и облегчающими, встрѣчаются такія, которыя надо скорѣе отнести къ числу головоломокъ.

Такія головоломки нельзя причислить къ нагляднымъ пособіямъ, ибо эти послѣднія должны быть просты и понятны настолько, чтобы ученикъ сразу схватилъ бы, въ чемъ тутъ дѣло, какое построеніе нужно сдѣлать, чтобы получить квадратъ, построенный на гипотенузѣ и на катетахъ. Часто встрѣчаются однако-же пособія, которыя являются не пособіями, а головоломками и имъ на нашъ взглядъ не мѣсто въ школѣ.

Знакомство со свойствами отдѣльныхъ пособій не исчерпываетъ однако же вопроса о снабженіи школъ наглядными пособіями въ томъ смыслѣ, чтобы собраніе ихъ составляло нѣчто цѣльное. Если мы посмотримъ на то, что существуетъ въ каталогахъ, нашихъ и заграничныхъ, то увидимъ, что за нѣкоторыми исключеніями въ нихъ перечисленъ рядъ пособій по планиметріи, стереометріи, начертательной геометріи и т. д., но если попробуете найти въ этихъ каталогахъ объединяющую мысль, то это встрѣтитъ затрудненіе.

Мнѣ извѣстны только два автора, дающихъ законченный наборъ пособій по математикѣ—это Кеппъ и Трейтлейнъ, послѣдній является авторомъ методики геометріи и потому его пособія заслуживаютъ особеннаго вниманія. Въ остальныхъ случаяхъ мы такой системы въ каталогахъ не встрѣчаемъ.

Выставочная комиссія, которая работала по устройству нынѣ открытой выставки, старалась разобраться въ этомъ матеріалѣ и старалась какъ-нибудь разгруппировать пособія.

Результаты ея работъ могутъ быть въ общихъ чертахъ сведены къ слѣдующей группировкѣ пособій въ школѣ.

А. Пособія, иллюстрирующія логическіе пріемы мышленія и методологическіе пріемы доказательства.

Въ числѣ этихъ пособій отмѣчу пособіе для иллюстраціи анализа и синтеза древнихъ.

Если возьмемъ генеалогическое дерево и захотимъ установить, является ли Иванъ Ивановичъ потомкомъ Петра Петровича, то можно этотъ вопросъ разрѣшить 2 путями: или итти отъ потомковъ къ предкамъ, или наоборотъ. Если пойдемъ отъ предковъ къ потомкамъ, то число путей, по которымъ нужно изслѣдовать нашъ вопросъ, по мѣрѣ того, какъ поднимается генеалогическое дерево вверхъ, все болѣе и болѣе увеличивается, и если пропустить какой-нибудь изъ этихъ путей, то можетъ случиться, что мы не въ состояніи будемъ установить эту связь. Можетъ быть и другой путь—отъ потомковъ къ предкамъ, отъ сына къ отцу и т. д. Въ этомъ случаѣ путь становится вполнѣ опредѣленнымъ. Здѣсь выставлено пособіе для иллюстраціи анализа и синтеза: взяты 2 теоремы — 1) внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ равны между собою и 2) прямая, проведенная въ треугольникѣ, параллельно одной сторонѣ, отсѣкаетъ подобный треугольникъ. Между ними можно установить связь аналитическимъ и синтетическимъ путемъ:

А. Аналитическій путь.

I примѣръ: чтобы вывести теорему—«прямая, проведенная внутри △-ка, || какой-нибудь его сторонѣ, отсѣкаетъ отъ него другой △-къ подобный первому»,

надо знать, что:

2 многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ называются подобными, если углы одного соотвѣтственно = угламъ другого и сходственныя стороны пропорціональны;	общею мѣрою 2-хъ отрѣзковъ называется такой отрѣзокъ, который укладывается цѣлое число разъ въ 2-хъ данныхъ·	если на одной сторонѣ ∠ отложить равныя части и черезъ точки дѣленія провести || прямыя до пересѣченія съ другой стороной угла, то на этой сторонѣ отсѣкутся равныя части;	2 отрѣзка называются соизмѣримыми, если они имѣютъ общую мѣру, и несоизмѣримыми, когда они общей мѣры не имѣютъ;	отношеніемъ 2 значеній A и B одной и той же величины называется число, измѣряющее A, когда B принято за единицу

↓

Если 2 || прямыя пересѣчены третьей, то соотвѣтственные углы равны между собою.

↓

Если 2 || пересѣчены третьей, то внутренніе накрестъ-лежащіе ∠ равны между собою.

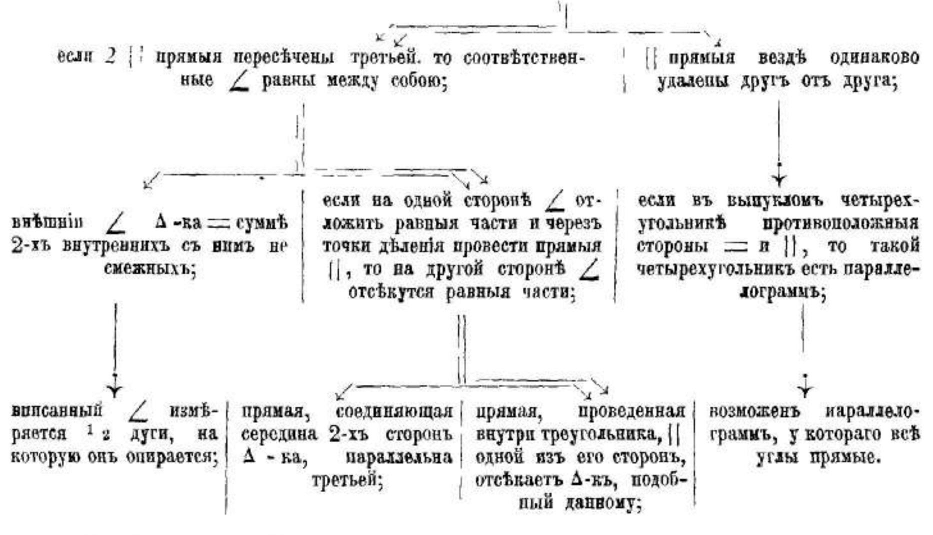
II примѣръ *): чтобы вывести теорему—«существуютъ подобные △-ки съ произвольнымъ (раціональнымъ или ирраціональнымъ) коэффиціентомъ пропорціональности сторонъ», надо знать что:



если существуютъ въ одной плоскости 2 прямыя не пересѣкающіяся, то сѣкущая образуетъ съ ними равные соотвѣтственные углы.

Б. Синтетическій путь.

Зная теорему: «Если двѣ || прямыя пересѣчены третьей, то внутренніе накрестъ-лежащіе ∠∠ равны между собою» и идя по пути, указанному стрѣлками, можно вывести 4 слѣдствія:



Двойныя стрѣлки указываютъ путь, по которому надо итти, чтобы вывести 3-ье слѣдствіе.

Къ этой же группѣ пособій можно отнести всѣ пособія, служащія для иллюстраціи метода косвенныхъ измѣреній при вычисленіи площадей, объемовъ, а также и нѣкоторыхъ отрѣзковъ и т. п.

*) См. Клифордъ, «Здравый смыслъ точныхъ наукъ».

Б. Пособія, иллюстрирующія идеи, касающіяся пространственныхъ представленій и числа.

Къ этой группѣ относятся пособія, служащія для выясненія идеи равенства и равновеликости, устанавливаемой разными путями (разрѣзаніе и перекладываніе, сдвигъ) и т. п. Сюда же можно отнести и иллюстраціи идеи симметріи. На этой группѣ пособій я остановлюсь подробнѣе, какъ на примѣрѣ детальной разработки въ наглядныхъ пособіяхъ одного вопроса.

Вотъ послѣдовательный ходъ ознакомленія съ этой идеей.

Симметрія относительно точки на плоскости: кружки одного цвѣта на пучкѣ прямыхъ указываютъ на симметрію относительно точки пересѣченія прямыхъ.

Симметрія относительно точки на плоскости: вершины параллелограмма и его стороны симметричны относительно его центра. Діагонали—элементы пучка прямыхъ.

Симметрія относительно точки въ пространствѣ: шарики одного цвѣта на связкѣ прямыхъ указываютъ на симметрію относительно общей точки пересѣченія прямыхъ.

Симметрія относительно точки въ пространствѣ:

а) вершины куба и его грани симметричны относительно его центра. Діагонали—элементы связки прямыхъ;

б) трехгранные углы—симметричные, но не совмѣстимые;

в) трехгранные углы—совмѣстимые, но не симметричные.

Симметрія относительно прямой на плоскости: кружки и прямыя одного цвѣта указываютъ на симметричные элементы.

Симметрія относительно прямой на плоскости: симметрія «змѣя» относительно одной оси и ассиметрія относительно другой.

Симметрія относительно прямой на плоскости: симметрія эллипса относительно двухъ діаметровъ и ассиметрія относительно другихъ.

Симметрія относительно оси въ пространствѣ: части конической поверхности симметричны относительно прямой пересѣченія пучка плоскостей.

Симметрія относительно плоскости въ пространствѣ: шарики и прутья одного цвѣта указываютъ на симметричные элементы.

Симметрія относительно плоскости въ пространствѣ: двѣ развертывающіяся поверхности, симметричныя относительно плоскости.

Къ группѣ Б относятся также пособія для иллюстраціи понятія о дробномъ числѣ, законовъ ариѳметическихъ дѣйствій и т. д.

В. Пособія, иллюстрирующія отдѣльныя теоремы и дѣйствія.

Этого рода пособія являются наиболѣе распространенными и знакомыми, останавливаться на нихъ долго я не буду, укажу лишь нѣсколько примѣровъ, какъ-то—пособія для иллюстраціи равновеликости пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами, коническія сѣченія, квадратъ и кубъ двучлена и трехчлена и т. п.

Г. Пособія для воспитанія навыковъ.

Къ нимъ относятся приборы для воспитанія умѣнія оцѣнивать на глазъ углы (ученикъ повѣряетъ при помощи такого прибора величину угла зрѣнія, оцѣненнаго имъ предварительно на глазъ) длины, объемы и т. д.

Е. Къ послѣдней группѣ могутъ быть отнесены пособія, служащія для измѣренія длинъ, угловъ объемовъ и площадей, при помощи которыхъ могутъ происходить практическія занятія ученика и въ классѣ и въ полѣ, благодаря чему создается съ одной стороны интересъ къ работѣ, а съ другой ученику приходится рѣшать задачи, въ которыхъ онъ будетъ имѣть не ничего не говорящія ему числа, а добытыя имъ самимъ путемъ измѣреній, и, слѣдовательно, связанныя съ опредѣленными пространственными представленіями.

Къ этимъ пособіямъ могутъ быть отнесены мѣры длины, объемовъ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ, сюда же относятся и приборы для рѣшенія задачъ, связанныхъ съ опредѣленіемъ положенія точки на мѣстности, превышенія одной точки надъ другой, положенія небесныхъ свѣтилъ и т. д. Для этой цѣли могутъ служить полевой угломѣръ Омана вмѣстѣ съ принадлежностями для измѣренія длинъ на мѣстности и опредѣленія угловъ возвышеній, и квадрантъ Манта для астрономическихъ задачъ.

Въ заключеніе хотѣлось бы вспомнить мысль, впервые

высказанную Кантомъ—ребенокъ долженъ умѣть различать знаніе отъ мнѣнія и вѣрованія. Эти слова накладываютъ на насъ обязательство, широко примѣняя наглядныя пособія, въ то же время всегда разграничивать интуитивныя воспріятія отъ логически обоснованнаго вывода.

Съ другой стороны не будемъ забывать словъ Гербарта—«всякій долженъ быть виртуозомъ въ своей спеціальности, но всѣ должны имѣть вкусъ ко всѣмъ вещамъ.» Для достиженія же широкаго распространенія математическихъ занятій въ массахъ надо, чтобы преподаватель математики былъ широко образованъ педагогически.

Позвольте мнѣ принести благодарность той молодежи, учащейся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, которая очень помогла осуществить нашу выставку наглядныхъ пособій».

Тезисы.

1. Необходимость наглядныхъ пособій въ начальномъ обученіи математикѣ признается всѣми; что касается до среднихъ и высшихъ ступеней обученія, то тутъ введеніе наглядныхъ пособій становится все болѣе и болѣе спорнымъ и ограниченнымъ.

2. Ограниченность употребленія наглядныхъ пособій на болѣе высшихъ ступеняхъ обученія объясняется, во 1-хъ, причинами психологическаго характера, во 2-хъ, характеромъ науки, въ 3-хъ, несовершенствомъ пособій, въ 4-хъ, неподготовленностью учителей.

3. Развитіе способности отвлеченнаго мышленія не исключаетъ однако же значенія наглядныхъ пособій, а лишь передвигаетъ потребность въ наглядныхъ пособіяхъ въ новыя болѣе сложныя области.

4. Запасъ представленій, вынесенныхъ изъ низшей ступени обученія, не можетъ быть достаточнымъ для послѣдующихъ, даже въ томъ случаѣ, если курсы построены концентрически.

5. Характеръ науки о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними не требуетъ вообще говоря того, чтобы за ея выводами не стояли пространственные образы.

6. Отсутствіе наглядныхъ пособій при изученіи свойствъ

пространства и протяженій можетъ повести къ искаженію пространственныхъ представленій.

7. Учителя среднихъ школъ, окончившіе высшіе уч. заведенія, обладая научными знаніями, не имѣютъ ни методической подготовки, ни знанія основныхъ положеній педагогики, вслѣдствіе чего у нихъ нѣтъ критерія для оцѣнки значенія наглядныхъ пособій.

8. Современная педагогика занята проведеніемъ въ школу принципа самодѣятельности ученика, наряду съ чѣмъ замѣчается стремленіе замѣнить пассивныя наглядныя пособія по математикѣ—активными.

9. Пользованіе активными наглядными пособіями соединено съ преодолѣваніемъ техническихъ и логическихъ трудностей.

10. Техническія трудности могутъ быть вносимы лишь постольку, поскольку они не затемняютъ цѣли пользованія пособіемъ.

11. Наглядныя пособія, какъ осуществленіе педагогической мысли, отстаютъ отъ нея.

12. Пособія могутъ быть подраздѣлены на 2 группы: 1) изготовленныя для иллюстраціи отдѣльныхъ теоремъ и 2) подвижныя,—пригодныя въ разныхъ комбинаціяхъ для иллюстраціи группы явленій.

13. Мѣсто пособій 1 рода главнымъ образомъ въ музеяхъ. Значеніе ихъ тамъ—служить примѣромъ, наталкивающимъ на новые пріемы обученія.

14. Пособія II рода лучше могутъ обслуживать школы, нежели I рода, сокращая количество пособій въ школахъ и способствуя проведенію принципа активности ученика. Тѣмъ не менѣе ограничиться пособіями II рода нельзя.

15. Нѣкоторыя наглядныя пособія заходятъ за предѣлы школьныхъ наглядныхъ пособій, переходя въ различные виды головоломокъ и въ такомъ видѣ не могутъ способствовать развитію логическаго мышленія.

16. Пособія по математикѣ должны быть планомѣрно разработаны въ цѣлое: кабинетъ математическихъ пособій. Промышленность же даетъ наборъ пособій, не объединенныхъ руководящей мыслью.

17. Слѣдуя работамъ выставочной комиссіи Съѣзда, можно въ слѣдующихъ общихъ чертахъ намѣтить планъ математическаго кабинета при средней школѣ:

А) Пособія. иллюстрирующія логическіе пріемы мышленія и методологическіе пріемы доказательствъ.

Б) Пособія, иллюстрирующія идеи, касающіяся пространственныхъ представленій и числа.

С) Пособія, иллюстрирующія отдѣльныя теоремы и дѣйствія.

Д) Пособія, служащія для воспитанія навыковъ.

Е) Приборы для измѣренія длины, угловъ, объемовъ, площадей и т. п., какъ матеріала для вычисленія.

Пренія по докладамъ А. Н. Смирнова и Д. Э. Теннера.

Н. А. Рейнольскій (Кострома). „Я позволю себѣ высказаться по поводу одного доказательства теоремы: въ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ. Докладчикъ сказалъ, что если мы проведемъ грань извѣстнымъ способомъ, его способомъ, то эта грань можетъ идти параллельно одному изъ реберъ 3-граннаго угла. Этого мы можемъ избѣжать и найти болѣе наглядное доказательство, которое я и желалъ бы здѣсь показать". (Чертитъ на доскѣ и объясняетъ *)

„Относительно наглядныхъ пособій я долженъ сказать, что наглядность можетъ быть графическая и геометрическая, но наглядность должна состоять и въ упрощеніи доказательствъ, и въ полнотѣ изслѣдованія того или иного вопроса, что у насъ отсутствуетъ обыкновенно въ геометріи. Напр., мы изслѣдуемъ 4 теоремы о наклонныхъ: 2 прямыхъ и 2 обратныхъ. Для такой же теоремы, какъ теорема Пиѳагора, которая служить основой геометрическихъ и тригонометрическихъ вычисленій, мы имѣемъ одно прямое положеніе, между тѣмъ какъ обратнаго нѣтъ, т. е. нѣтъ положенія: если квадратъ, построенный на одной сторонѣ треугольника, равно великъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на

*) Способъ доказательства, указанный г. Рейнольскимъ, позволяетъ избѣжать ошибку учебника Киселева (см. стр. 229, докладъ Теннера); это доказательсво можно найти, напр., въ Элементахъ Геометріи Филипса и Фишера, пер. съ англ. Другія видоизмѣненія встрѣчаются у Borel'a, Bourlet и др. *Прим. ред.*

двухъ другихъ сторонахъ, то такой треугольникъ долженъ быть прямоугольнымъ".

Д. М. Левитусъ (Спб.). „Мое замѣчаніе будетъ относиться къ той части доклада, гдѣ рѣчь идетъ о среднихъ и старшихъ классахъ. Дѣйствительно, тѣ пріемы, которыми мы часто пользуемся съ учениками младшихъ классовъ, по цѣлому ряду соображеній оказываются непримѣнимыми для среднихъ и старшихъ классовъ. Мнѣ была предоставлена возможность произвести съ учениками среднихъ и старшихъ классовъ нѣсколько геодезическихъ упражненій во время экскурсій. Я очень сожалѣю, что недостатокъ времени у Съѣзда не позволяетъ мнѣ сдѣлать по этому вопросу спеціальный докладъ, но я долженъ отмѣтить, что работы учениковъ по установкѣ приборовъ по уровню и по провѣркѣ инструментовъ требуютъ углубленія въ область пространственныхъ представленій. Работая въ полѣ, ученики получаютъ возможность лишній разъ заставить себя продумать цѣлый рядъ геометрическихъ положеній, и мнѣ кажется, что геодезическія упражненія могли бы имѣть большую пользу въ дѣлѣ обученія и замѣнить собою наглядныя пособія въ старшихъ классахъ. При этомъ долженъ прибавить, что я никоимъ образомъ не предполагаю въ какой бы то ни было формѣ вводить геодезію въ курсъ средней обще-образовательной школы; рѣчь идетъ только о двухъ-трехъ экскурсіяхъ, но экскурсіи эти могутъ принести большую пользу ученикамъ."

А. Р. Кулишеръ (Спб.). „Въ докладѣ Д. Э. Теннера было показано многообразіе способовъ, служащихъ для возбужденія при помощи наглядныхъ пособій представленій отвлеченнаго характера. Мы слышали далѣе отъ Д. М. Левитуса, что въ старшихъ классахъ съ цѣлью углубленія отвлеченныхъ понятій можно пользоваться геодезическими измѣреніями. Значеніе наглядныхъ пособій при обученіи математикѣ заключается, конечно, не въ разсматриваніи или копированіи, а въ этомъ подготовленіи къ отвлеченію. Поэтому въ тѣхъ школахъ, гдѣ пособія изготовляются самимъ ученикомъ, занятія надо вести такъ, чтобы техническая сторона изготовленій пособій не заслоняла внутренней ихъ стоимости, заключающейся, какъ сказано, въ подготовкѣ ученика къ воспріятію отвлеченныхъ понятій".

„Мнѣ пришлось 2 года тому назадъ заграницей пересмотрѣть очень многое, относящееся къ наглядности, начиная отъ самыхъ низшихъ ея ступеней и кончая университетами, и видѣть тутъ очень интересные примѣры. Въ Мюнхенскомъ университетѣ, гдѣ читаетъ Ф. Линдеманъ, нашелся проф. Делеманъ, который со своими студентами готовитъ наглядныя пособія въ родѣ привезенныхъ сюда изъ одной изъ Костромскихъ гимназій, но, разу-

мѣется, относящихся къ болѣе сложной области преподаванія. И Делеманъ не опасается, несмотря на неполное признаніе его товарищами этой части его работы, что такой наглядностью будто бы понизится способность студентовъ воображать пространственныя соотношенія".

„У каждаго изъ учениковъ могутъ быть и, конечно, имѣются представленія и безъ наглядныхъ пособій, но у класса, какъ цѣлаго, вообще говоря, не имѣется одного общаго представленія относительно того или другого геометрическаго образа, и учитель съ учениками въ области представленій говорятъ зачастую на разныхъ языкахъ. Съ этой точки зрѣнія на всѣхъ ступеняхъ наглядныя пособія всегда будутъ полезны. Это—необходимый способъ для того, чтобы установить общій языкъ между преподавателемъ, являющимся одной изъ главныхъ единицъ въ классѣ и остальными единицами, не менѣе существенными, какими являются ученики. Вотъ, мнѣ кажется, та точка зрѣнія, съ которой намъ придется считаться далѣе не на этомъ только Съѣздѣ, но и на 5, 6 или 7-омъ."

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я отмѣчу въ высшей степени важную часть доклада Д. Э. Теннера—попытку ввести психологическія основанія въ пользованіе разными наглядными пособіями. Эта попытка заняла много времени и быть можетъ, благодаря этому, остальная часть разбора пособій была произведена на скорую руку".

„Дѣйствительно, если мы хотимъ пользоваться пособіями, намъ необходимо имѣть сознаніе, что это психологически полезно. Бываютъ моменты, что пособія затемняютъ сознаніе учениковъ, притупляютъ его. Сдѣлать такого рода психологическій анализъ и попытался г. Теннеръ. Заграницей это постоянно дѣлается, и еще въ началѣ этой осени мнѣ пришлось слышать отъ австрійскихъ педагоговъ, что они заняты вопросомъ—подвести психологическій фундаментъ къ пользованію тѣми или иными наглядными пособіями. Заграницей существуетъ по этому вопросу громадная литература, и очень жаль, что г. Теннеръ, отрѣшившись отъ этихъ крупныхъ попытокъ, особенно въ Германіи, сталъ на точку зрѣнія рядового русскаго преподавателя и захотѣлъ сдѣлать самостоятельный психологическій анализъ безъ связи съ попытками за рубежомъ. Я прослушалъ съ большимъ удовольствіемъ эту попытку все-таки самостоятельнаго рѣшенія; правда, она ничего не дала: заграницей пособія различаются по системѣ школъ и методу, по которому построены тѣ или иныя группы пособій. Между сторонниками этихъ группъ пособій происходятъ тренія, борьба, споры, по какому принципу пособія построить лучше, хуже и т. д. Здѣсь же докладчикъ, отрѣшившихъ отъ зарубежной точки зрѣнія, ставъ на

обывательскую, всѣ эти пособія сливаетъ въ одно. Такъ что, если съ одной стороны эта попытка — самостоятельно рѣшить вопросъ—въ высшей степени пріятна, съ другой стороны намъ нужно будетъ познакомиться хорошо съ тѣмъ, что дѣлается въ зарубежныхъ областяхъ, чтобы мы, изучивши такимъ образомъ подробно вопросъ, могли бы самостоятельно итти далѣе. Поэтому я выражаю пожеланіе, чтобы заграничная литература, которая имѣется по этому предмету, переводилась на русскій языкъ."

ПЯТОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

31 декабря $10^1/_2$ ч. дня.

Въ предсѣдатели избраны проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской и пр.-доц. В. В. Бобынинъ. Въ почетные секретари — А. П. Киселевъ.

XV. Элементы теоріи чиселъ въ средней школѣ.

Докладъ І. И. Чистякова (Москва).

«Математика—царица наукъ и ариѳметика—царица математики»—говоритъ Гауссъ. Подъ именемъ ариѳметики геніальный авторъ «Disquisitiones arithmeticae» разумѣетъ ариѳметику теоретическую или, точнѣе, теорію чиселъ, науку, изучающую свойства цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Мы здѣсь занимаемся пересмотромъ учебнаго матеріала, при этомъ является естественнымъ желаніе заглянуть и въ уголокъ учебнаго курса. Спросимъ себя, какія цѣли нами преслѣдуются при преподаваніи ариѳметики? Ариѳметика изучается у насъ въ наиболѣе распространенномъ типѣ учебныхъ заведеній въ младшихъ классахъ. Затѣмъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ она проходится лишь въ выпускномъ классѣ, гдѣ полагается рѣшить нѣсколько вопросовъ изъ теоретической ариѳметики.

При преподаваніи ариѳметики въ младшихъ классахъ преслѣдуется чисто практическая цѣль, а именно: имѣютъ въ виду научить учащихся производить дѣйствія надъ всевозможными цѣлыми и дробными числами, надъ составными именованными числами, а также—рѣшать придуманныя спеціально задачи квази-практическаго характера: на вычисленіе времени,

проценты, составленіе смѣсей (безъ прибыли и убытка!) и т. п. Единственная статья теоретическаго характера — о дѣлимости чиселъ — проходится лишь съ цѣлью дальнѣйшаго практическаго примѣненія и не сопровождается упражненіями, которыя производились бы не механически, а заставляли бы ученика размышлять. Я замѣчалъ, что ученики, изучающіе этотъ отдѣлъ, попадаютъ въ затруднительное положеніе при рѣшеніи задачъ вродѣ слѣдующей: «дѣлимое 100, остатокъ 6, найти дѣлителя и частное». Точно также ихъ затрудняютъ задачи конкретнаго содержанія, въ которыхъ приходится найти наименьшее кратное или общаго наибольшаго дѣлителя. Нѣсколько странно, что учебныя пособія по ариѳметикѣ не даютъ подходящихъ конкретныхъ примѣровъ, хотя на необходимость конкретизаціи этихъ вопросовъ много разъ указывалось.

Знакомство со свойствами цѣлыхъ чиселъ не много подвигается впередъ. Свѣдѣніями изъ алгебры учащіеся рѣдко пользуются при ариѳметическихъ выкладкахъ. При вычисленіи выраженій вида $\sqrt{a^2-b^2}$ лишь немногіе прибѣгаютъ къ разложенію на множители подкоренного выраженія. Въ выпускномъ классѣ, какъ было упомянуто, полагается повторить ариѳметику съ прибавленіемъ нѣкоторыхъ статей теоретическаго характера. Этимъ какъ бы предполагается подвести фундаментъ подъ ариѳметическія познанія. На все это отпускается слишкомъ мало времени, едва ли болѣе $^1/_2$ часа въ недѣлю.

Относительно содержанія теоретическихъ статей оффиціальная программа говоритъ слѣдующее: «при повтореніи доказываются основныя теоремы о дѣлимости чиселъ; теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго двумя способами; теоремы, дающія необходимыя и достаточныя условія обращенія обыкновенныхъ несократимыхъ дробей въ десятичныя и періодическія». Въ реальныхъ училищахъ въ курсъ ариѳметики VII класса включено еще рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ; въ программахъ же гимназій эта часть относится къ алгебрѣ. Я попробовалъ справиться въ объяснительной запискѣ, что разумѣется подъ именемъ основныхъ теоремъ о дѣлимости чиселъ, и былъ не мало удивленъ, когда узналъ, что подъ теоремами о дѣлимости

подъ теоремами о дѣлимости чиселъ слѣдуетъ разумѣть теоремы: 1) если число дѣлитъ каждое слагаемое порознь, то оно дѣлитъ и сумму ихъ; 2) если число дѣлитъ нацѣло сумму двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое слагаемое. Эти двѣ теоремы даютъ необходимое и достаточное условіе дѣлимости на данное число. Подъ теоремами, на которыхъ основывается нахожденіе наименьшаго кратнаго и общаго наибольшаго дѣлителя, должно понимать теоремы, служащія для доказательства возможности разложить число на первоначальныхъ множителей только однимъ способомъ. Независимо отъ того, что перечисленныя теоремы представляютъ собою незначительное пополненіе элементарнаго курса, едва ли даже и самую формулировку ихъ можно признать удачной и ясной. Одна теорема говоритъ о дѣлимости суммы, а другая—одного изъ слагаемыхъ, и обѣ вмѣстѣ онѣ не могутъ относиться къ одному и тому же случаю. Да и вообще всѣ теоремы о дѣлимости лучше выводить изъ разсмотрѣнія дѣленія съ остаткомъ. Но я не буду входить въ подробную критику этого матеріала; скажу только о результатахъ его изученія. Когда я присутствовалъ на экзаменахъ гимназистовъ и реалистовъ выпускного класса по ариѳметикѣ, то вынесъ впечатлѣніе, что она является для нихъ обремененіемъ, но не развитіемъ въ смыслѣ расширенія знакомства со свойствами чиселъ. Когда, напр., я предлагалъ такую задачу: «сумма двухъ чиселъ равна 96, а общій наибольшій дѣлитель—12; найти эти числа», то учащіеся не умѣли даже приступить къ рѣшенію этого вопроса. Въ общемъ, развитіе числовыхъ понятій у нашихъ учащихся весьма слабо, оно не увеличивается и въ случаѣ, когда теоретическая ариѳметика проходится болѣе подробно. Такъ, на конкурсныхъ экзаменахъ въ Императорскомъ Московскомъ Инженерномъ Училищѣ, гдѣ я принимаю участіе въ качествѣ экзаменатора, требуется знаніе теоретической ариѳметики по широкой программѣ. Учащіеся знаютъ множество теоремъ о числахъ, но я замѣтилъ слабость числовыхъ представленій и понятій у нихъ, что напоминаетъ объ отсутствіи у учащихся стереометрическихъ представленій; на вопросъ: будетъ ли двугранный уголъ между боковыми гранями правильной четыреугольной пирамиды ост-

рымъ, прямымъ или тупымъ можно получить и тотъ, и другой, и третій отвѣтъ; на вопросъ, будетъ ли $\sqrt[10]{10}$ равенъ, больше или меньше единицы, учащіеся могутъ дать всѣ три отвѣта. Нерѣдко можно констатировать тотъ печальный фактъ, что наши учащіеся знаютъ о свойствахъ цѣлыхъ чиселъ меньше, чѣмъ о логариѳмахъ, о непрерывныхъ дробяхъ. Мало помогаетъ дѣлу и прохожденіе неопредѣленныхъ уравненій, куда бы ихъ ни ставила оффиціальная программа,—въ курсъ алгебры или ариѳметики.

Между тѣмъ, такое пренебреженіе къ знанію свойствъ цѣлыхъ чиселъ идетъ прежде всего въ разрѣзъ съ исторіей науки. Свойствами цѣлыхъ чиселъ: дѣлимостью, простѣйшими числовыми функціями и пр. люди интересовались во всѣ времена. Вокругъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ возникали суевѣрія, но возникали и глубокія философскія системы. Изученіе свойствъ цѣлыхъ чиселъ имѣло важное значеніе для развитія всѣхъ частей математической науки; говорятъ, что самое открытіе Пиѳагоровой теоремы, которое въ дальнѣйшемъ имѣло благопріятное вліяніе на развитіе анализа, можетъ быть поставлено въ связь съ открытіемъ подходящей комбинаціи цѣлыхъ чиселъ. Совсѣмъ недавно Георгъ Канторъ изъ разсмотрѣнія натуральнаго ряда чиселъ создалъ ученіе о множествахъ и числахъ трансфинитныхъ, а Кронекеръ сдѣлалъ замѣчательную попытку вывести математическія понятія изъ единаго понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Несомнѣнно, что теорія чиселъ имѣетъ не менѣе важное въ смыслѣ развитія значеніе, чѣмъ многіе отдѣлы математики, изучаемые въ настоящее время, такъ какъ объектомъ изученія здѣсь является цѣлое положительное число, т. е. понятіе наиболѣе простое, съ которымъ учащіеся знакомятся ранѣе всего. Ознакомленіе со свойствами чиселъ очень часто представляетъ для учащихся большой интересъ: это подтверждается, напр., результатомъ анкеты, предпринятой въ 1905 году между выдающимися математиками журналомъ «L'Enseignement mathématique». Первый вопросъ этой анкеты былъ такой: въ какомъ возрастѣ по вашимъ воспоминаніямъ и при какихъ обстоятельствахъ у васъ пробудился интересъ къ математикѣ? Изъ весьма боль-

шого количества отвѣтовъ оказывается, что этотъ интересъ чаще всего возникаетъ въ возрастѣ отъ 11 до 15 лѣтъ и преимущественно при рѣшеніи задачъ относительно свойствъ чиселъ. Я не имѣлъ смѣлости принять участіе въ названной анкетѣ, но я живо помню моментъ, когда у меня пробудился интересъ къ математикѣ. Во 2-мъ классѣ гимназіи мнѣ попалась такая задача: доказать, что всякое абсолютно простое число, будучи увеличено, или уменьшено, на единицу, дѣлится на 6. Мнѣ удалось это доказать, что доставило мнѣ большую радость. Послѣ этого меня крайне заинтересовалъ вопросъ, почему именно пятая степень всякаго числа оканчивается на ту же цифру, какъ и первая? И хотя доказать этого мнѣ тогда не удалось, интересъ къ математикѣ у меня уже не ослабѣвалъ. Въ біографіи недавно скончавшагося профессора, знаменитаго русскаго ученаго проф. Вороного, сообщается, что у него появился интересъ къ математикѣ, когда ему удалось рѣшить задачу числового характера, помѣщенную въ «Журналѣ Элементарной Математики», издававшемся проф. В. П. Ермаковымъ, и это опредѣлило направленіе всей его научной дѣятельности.

На задачахъ, касающихся свойствъ чиселъ, я позволю себѣ остановиться нѣсколько подробнѣе. Вопросы подобнаго рода почти не встрѣчаются въ нашихъ алгебраическихъ и ариѳметическихъ задачникахъ, но они разсѣяны по математическимъ хрестоматіямъ, фигурируютъ въ сборникахъ темъ, якобы предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ, распространяются между учащимися путемъ устной передачи; ихъ можно встрѣтить въ математическихъ журналахъ, напр. въ «L'éducation mathématique» и «Gournal de mathématiques élémentaires», издаваемыхъ Vuibest'омъ въ Парижѣ; въ «Leitschrift für math. und naturwiss. Unterrchit» Hoffman'а и др. Онѣ составляютъ значительный процентъ задачъ, помѣщаемыхъ для учащихся въ журналѣ «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики». Я пользуюсь случаемъ напомнить собранію, что съ момента возникновенія этого высоко полезнаго журнала исполнилось ровно 25 лѣтъ. Названныя задачи обыкновенно касаются вида чиселъ, дѣлящихся на то или иное число, простѣйшихъ числовыхъ функцій, раціональныхъ выраженій для элементовъ треугольниковъ и т. д. Для рѣшенія такихъ задачъ

учащіеся, незнакомые съ основами теоріи чиселъ, не имѣютъ общихъ методовъ и должны пользоваться разными искусственными примитивными пріемами, вродѣ разложенія на множители, рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій и т. п. Это имѣетъ и выгодную сторону, такъ какъ при пользованіи искусственными пріемами изощряется изобрѣтательность учащихся, и невыгодную, такъ какъ много энергіи тратится на преодолѣваніе затрудненій, которыя при большемъ запасѣ знаній изъ теоретической ариѳметики не возникали бы. Получается нѣкоторая аналогія съ тѣмъ, что недавно еще имѣло мѣсто въ области задачъ на построеніе. Извѣстно, что раньше онѣ рѣшались безъ общихъ методовъ, каждая въ отдѣльности; есть и сейчасъ еще сборники задачъ на построеніе, въ которыхъ онѣ не приведены въ систему. Однако, нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ Петерсенъ за границей и Иванъ Ивановичъ Александровъ у насъ въ Россіи разработали общіе методы ихъ рѣшенія, и съ тѣхъ поръ оно было поставлено на твердый фундаментъ и сдѣлалось полезною частью учебнаго матеріала. Подобнымъ же подведеніемъ фундамента подъ задачи названнаго типа было бы ознакомленіе учащихся съ элементами теоріи чиселъ. Оно позволило бы углубить и расширить эту область упражненій, которыя пока по необходимости касаются довольно ограниченнаго круга темъ.

Но въ защиту введенія въ среднеучебный курсъ свѣдѣній изъ теоріи чиселъ, можно привести и другія соображенія. Однимъ изъ нихъ является и предстоящее введеніе въ курсъ средней школы понятія о функціяхъ и объ ихъ измѣненіи. При этомъ необходимо пріидется пользоваться понятіемъ о непрерывности. Но было бы слишкомъ одностороннимъ знакомить учениковъ только съ функціями, измѣняющимися непрерывно. Существуетъ множество и прерывныхъ функцій; прерывность измѣненія величинъ наблюдается и въ природѣ. Элементарная теорія чиселъ даетъ намъ въ числовыхъ функціяхъ простѣйшіе и наиболѣе понятные примѣры величинъ, измѣняющихся прерывно, и ознакомленіе съ ними учащихся будетъ содѣйствовать ихъ болѣе полному математическому развитію. Напомню, что покойный профессоръ Московскаго Университета Н. В. Бугаевъ придавалъ весьма важное значеніе теоріи прерывныхъ функцій и теоріи чиселъ, какъ простѣй-

шему ея виду, и ставилъ ученіе о прерывности въ связь съ глубокими философскими проблемами. Въ настоящее время эта идея находитъ себѣ все большее признаніе, и теорія чиселъ изучается параллельно съ анализомъ, несмотря на преобладающіе его успѣхи. Въ 1908 г. д-ръ Вольфскелль изъ Дармштадта завѣщалъ, какъ извѣстно, 100.000 марокъ тому, кто дастъ доказательство знаменитаго предложенія Фермата о невозможности рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^n + y^n = z^n$. Это повело къ оживленію интереса къ теоріи чиселъ не только среди ученыхъ, но и среди большой публики. Отзвуки этого оживленія чрезъ общую прессу доходятъ, конечно, и до нашихъ учащихся, и они такимъ несовершеннымъ способомъ узнаютъ впервые о существованіи науки—теоріи чиселъ и ея великихъ задачъ.

Изложу теперь свое предложеніе въ конкретной формѣ. Сущность его сводится къ слѣдующему: теоретическая ариѳметика поставлена у насъ совершенно неудовлетворительно, и знанія свойствъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ учащіеся изъ школы не выносятъ. Поэтому, я предлагаю ввести въ курсъ математики вмѣсто суррогатовъ теоріи чиселъ—изученіе самой теоріи чиселъ. Здѣсь я разумѣю въ частности алгориѳмъ общаго наибольшаго дѣлителя, понятіе о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ, теорію сравненій первой степени, теоремы Эйлера, Фермата и Вильсона, понятіе о степенныхъ вычетахъ. Для прохожденія этихъ отдѣловъ можно использовать то время, которое до сихъ поръ тратилось на изученіе теоретической ариѳметики, неопредѣленныхъ уравненій и нѣкоторыхъ иныхъ маловажныхъ статей курса. Проходить теорію чиселъ слѣдуетъ въ одномъ изъ старшихъ классовъ, съ надлежащими упражненіями. Для изложенія ея совершенно достаточно тѣхъ алгебраическихъ свѣдѣній, которыми наши учащіеся старшихъ классовъ уже располагаютъ. Въ младшихъ же классахъ слѣдуетъ стремиться къ возможно тѣсной связи между ариѳметикой и алгеброй и возможно шире утилизировать алгебраическія свѣдѣнія учащихся для пополненія ихъ ариѳметическихъ знаній. Такъ, большое примѣненіе въ этомъ отношеніи можетъ имѣть статья о разложеніи алгебраическихъ выраженій на множители, которая въ этомъ направленіи сейчасъ почти не утилизируется.

Я долженъ отмѣтить, что нѣкоторыя попытки введенія элементовъ теоріи чиселъ въ курсъ школьной математики дѣлаются на Западѣ уже и сейчасъ, и подобно тому, какъ введеніе началъ анализа въ среднеучебный курсъ впервые имѣло мѣсто во Франціи, тамъ же кладется начало и введенію теоріи чиселъ. Для примѣра укажу на прекрасный курсъ E. Humbert'a: «Traité d'arithmetique». Въ этой книгѣ въ изложеніе ариѳметики введены статьи о сравненіяхъ первой степени, о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ, главнѣйшія теоремы теоріи чиселъ, понятіе о степенныхъ вычетахъ, теорема о разложеніи числа на 4 квадрата и др., имѣется и нѣкоторое число упражненій. Предисловіе къ книгѣ написано извѣстнымъ ученымъ J. Tannery, который горячо привѣтствуетъ идею Humbert'a ввести въ изложеніе ариѳметики статьи изъ теоріи чиселъ. Еще съ большими подробностями J. Tannery вводитъ статьи изъ теоріи чиселъ въ свой собственный извѣстный курсъ ариѳметики: «Leçons d'arithme tique». У него, сверхъ перечисленныхъ выше статей, есть въ этой книгѣ и доказательство закона взаимности простыхъ чиселъ и цѣнныя историческія примѣчанія.

Изъ своего опыта я могу сообщить, что мнѣ приходилось знакомить учащихся съ элементами теоріи чиселъ, причемъ они ее усваивали легко и съ большимъ увлеченіемъ. Съ этою цѣлью я давалъ иногда учащимся книгу проф. А. В. Васильева «Веденіе въ анализъ», причемъ они читали ее съ неослабнымъ интересомъ.

Таковы мои аргументы въ защиту предложенія о введеніи элементовъ теоріи чиселъ въ среднюю школу. Но я могу прибавить еще, что теорія чиселъ есть та именно область математической науки, въ которой съ особеннымъ успѣхомъ подвизались русскіе ученые. Напомню о замѣчательныхъ трудахъ въ этой области Буняковскаго, Чебышева, Бугаева, Вороного, не говоря о нынѣ здравствующихъ ученыхъ. Ихъ труды составляютъ честь и гордость русской математической науки, и наилучшимъ воздаяніемъ ихъ памяти была бы широкая популяризація знаній изъ области теоріи чиселъ, путемъ введенія ея основъ въ нашу среднюю школу».

— ———

Пренія по докладу І. И. Чистякова.

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ). „Существуетъ мнѣніе, что врачъ, умѣющій ставить вѣрно діагнозъ, всегда предлагаетъ вѣрныя средства для излѣченія недуговъ больного. Какъ видно, не во всѣхъ отрасляхъ науки это такъ. Почтенный докладчикъ, І. И. Чистяковъ, удивительно вѣрно опредѣлилъ болѣзнь учащихся среднихъ учебныхъ заведеній, въ смыслѣ незнанія ариѳметики, но, къ сожалѣнію, предложенное имъ средство (введеніе въ старшіе классы средне-учебныхъ заведеній теоріи чиселъ) не излѣчитъ существующей болѣзни. На мой взглядъ, раньше чѣмъ вводить новое, слѣдуетъ выводить старые, вредные пріемы преподаванія ариѳметики. Напримѣръ, требуютъ отъ дѣтей, даже перваго класса, всякаго рода опредѣленія: что такое „единица", „число", что такое „сложеніе", „вычитаніе" и т. п. Мнѣ кажется, что это не только не полезно для дѣтей, но даже вредно. Я увѣрена, что всѣ, сидящіе здѣсь въ собраніи, помнятъ отлично свое дѣтство, когда въ первыхъ классахъ гимназіи они проходили ариѳметику. Не разъ, я думаю, проклинали они учебники Киселева и Малинина. По моему мнѣнію, подобные пріемы преподаванія ариѳметики въ младшихъ классахъ есть гниль, разъѣдающая дѣтскія души, вырабатывающая въ нихъ чувство отвращенія къ ариѳметикѣ—азбукѣ математики, и потому въ старшихъ классахъ, гдѣ учащимся вполнѣ доступно изученіе теоріи ариѳметики, они и слышать о ней не хотятъ".

XVI. Ирраціональныя числа въ средней школѣ.

Докладъ Т. А. Афанасьевой-Эренфестъ (Спб.).

§ 1. «Понятіе объ ирраціональномъ числѣ является, несомнѣнно, однимъ изъ наиболѣе трудныхъ, съ которыми человѣку приходится знакомиться въ средней школѣ. Въ то время, какъ съ понятіемъ о числѣ дробномъ, затѣмъ и о числѣ отрицательномъ всякій ученикъ поздно или рано осваивается, нерѣдко приходится встрѣчать людей, даже прошедшихъ высшее учебное заведеніе, которые сознаются, что идея о корнѣ квадратномъ изъ двухъ для нихъ настолько туманна, что они, напримѣръ, не могутъ отвѣтить на вопросъ: можно ли когда-нибудь ожидать открытія способа «вполнѣ точнаго» вычисленія корня квадратнаго изъ двухъ?

Главной причиной этого является, вѣроятно, само ирраціональное число. И я должна сознаться, что, если бы я была поклонницей лабораторнаго метода и безграничнаго приспособленія *программы* къ ученику, то выкинула бы совсѣмъ ирраціональныя числа изъ средней школы. Но я стою на другой точкѣ зрѣнія: я считаю, что есть идеи, методы, умѣнія, безъ которыхъ невозможно соглашаться выпускать ученика изъ средней школы, и я предпочитаю, чтобы къ нѣкоторымъ пунктамъ программы—наоборотъ—приспособляли *ученика*... при помощи достаточно тщательно подобранныхъ методовъ.

Въ послѣдніе годы все чаще подвергается осужденію обычное «наивное» изложеніе ученія объ ирраціональномъ числѣ. Вейерштрассъ, Дедекиндъ, Канторъ и другіе авторы, писавшіе приблизительно въ то же время *), научили видѣть его многочисленные логическіе дефекты.

Ихъ теоріи, основанныя всѣ на опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ при помощи безконечныхъ совокупностей раціональныхъ чиселъ, своей стройностью и общностью произвели и до сихъ поръ производятъ на всякаго, кто знакомится съ ними въ зрѣломъ возрастѣ, такое сильное впечатлѣніе, что у многихъ является мысль—одну изъ этихъ теорій положить въ основаніе первоначальнаго ознакомленія учениковъ съ ирраціональнымъ числомъ. Нѣкоторые полагаютъ, что устраненіе логическихъ дефектовъ по одному изъ этихъ методовъ достаточно для того, чтобы усвоеніе идеи раціональнаго числа вполнѣ давалось начинающимъ.

Я думаю, однако, что переходъ къ такого рода изложенію для первоначальнаго ознакомленія съ ирраціональнымъ числомъ и не необходимъ, и недостаточенъ: не необходимъ въ логическомъ отношеніи и недостаточенъ въ педагогическомъ. Во всякомъ случаѣ, прежде чѣмъ на это рѣшиться, необхо-

---

*) Подробныя литературныя указанія можно найти въ Encyklopädie des mathem. Wissensch. I, A. 3. Alfred Pringsheim, Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Processe.

На русскомъ языкѣ см. Дедекиндъ.—Непрерывность и ирраціональныя числа. Перев. С. Шатуновскаго. Изд. Mathesis—Одесса. Также Энциклопедія элементарной математики Вебера и Вельштейна. Т. I. Перев. Изд. Mathesis.

димо систематически сопоставить всѣ тѣ затрудненія, которыя можетъ представить для начинающаго тотъ или иной методъ изложенія. Этого мнѣ до сихъ поръ не приходилось встрѣчать, и одинъ шагъ въ этомъ направленіи я и хотѣла бы сдѣлать теперь.

§ 2. Наивное изложеніе, обычно практикуемое и теперь въ среднихъ школахъ, заключается, приблизительно, въ слѣдующемъ: «корнемъ n-ой степени изъ положительнаго числа a называется такое число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ a. Не всегда можно найти такое цѣлое или дробное число, чтобы его n-ая степень равнялась a: такъ, напримѣръ, если a есть число цѣлое, но не n-ая степень цѣлаго же числа, то $\sqrt[n]{a}$ не можетъ быть и числомъ дробнымъ. Слѣдовательно, мы здѣсь имѣемъ дѣло съ числомъ новаго рода— ирраціональнымъ. Выразить его при помощи конечнаго числа четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами нельзя. Но можно найти сколь угодно близкія къ нему дробныя числа и больше, и меньше его».

Далѣе, въ ученіи о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами говорится: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, потому что, возвышая въ n-ую степень произведеніе корней съ одной стороны, и корень изъ произведенія съ другой, получимъ одинъ и тотъ же результатъ ab».

Этимъ можно ограничиться для характеристики метода.

Остановимся сперва на логической сторонѣ.

Здѣсь на каждомъ шагу недостаетъ логическаго обоснованія:

1. Существованіе числа, обозначаемаго $\sqrt[n]{a}$, принимается какъ нѣчто, напередъ данное, несомнѣнно существующее, между тѣмъ, какъ для случая, когда a не есть n-ая степень раціональнаго числа, это есть результатъ соглашенія, не вытекающаго ни изъ какихъ предыдущихъ условій.

2. Даже послѣ того, какъ согласились бы относительно самаго существованія такого числа, еще ни изъ чего не слѣдовало бы, какъ оно велико, т. е. какія уже извѣстныя (раціональныя) числа больше и какія меньше него *): это также требуетъ особаго произвольнаго соглашенія.

---

*) Точно такъ же: которое изъ двухъ новыхъ чиселъ больше и которое меньше, и при какихъ условіяхъ они равны.

Только послѣ установки неравенствъ, которымъ будетъ удовлетворять вновь опредѣляемое число, можно говорить о томъ, какое раціональное число можетъ съ соотвѣтствующимъ приближеніемъ замѣнять его. Между тѣмъ, въ приведенномъ изложеніи сразу приступаютъ къ приближенному вычисленію радикаловъ, какъ будто неравенства, которымъ они удовлетворяютъ, изъ чего-то сами собой слѣдуютъ.

3. Утвержденіе: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, не имѣетъ смысла до тѣхъ поръ, пока не установлено, что̀ считать произведеніемъ двухъ радикаловъ: вѣдь, опредѣленіе дѣйствій, данное для раціональныхъ чиселъ, не приложимо къ этимъ числамъ новаго рода. То же самое относится, конечно, и къ результатамъ другихъ дѣйствій.

§ 3. Для оцѣнки новыхъ ученій нѣтъ надобности разбирать отдѣльно каждое изъ нихъ, такъ какъ съ педагогической точки зрѣнія разница между ними несущественна.

Для моей цѣли достаточно будетъ остановиться на одномъ изъ нихъ. Я выбираю ученіе Дедекинда, такъ какъ о немъ мнѣ можно будетъ говорить въ болѣе короткихъ словахъ, чѣмъ о другихъ.

У Дедекинда по всѣмъ указаннымъ тремъ пунктамъ сдѣланы точныя соглашенія.

1. Относительно условій, опредѣляющихъ существованіе числа: предположимъ, что данъ рецептъ, по которому раціональныя числа размѣщаются въ два мѣшка. Этотъ рецептъ долженъ удовлетворять двумъ условіямъ: a) чтобы о всякомъ раціональномъ числѣ можно было сказать, къ которому изъ двухъ мѣшковъ оно относится, b) чтобы всякое число перваго мѣшка было меньше всякаго числа второго мѣшка. Такихъ рецептовъ можно дать сколько угодно.

Такое раздѣленіе чиселъ на двѣ группы Дедекиндъ называютъ словомъ «Schnitt» — «сѣченіе» и дѣлаетъ слѣдующее соглашеніе: заданіе какого бы то ни было сѣченія опредѣляетъ существованіе нѣкотораго числа.

Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы молча ссылаться на существованіе числа, квадратъ котораго равняется двумъ, Дедекиндъ даетъ сѣченіе, которому и сопоставляется знакъ $\sqrt{2}$: именно, всѣ раціональныя числа можно раздѣлить на такія,

квадраты которыхъ меньше двухъ, и такія, квадраты которыхъ больше двухъ; это дѣленіе, очевидно, обладаетъ свойствами, присущими сѣченію.

2. Относительно величины числа: при указанномъ размѣщеніи чиселъ въ два мѣшка не можетъ случиться, чтобы одновременно въ первомъ было наибольшее, а во второмъ наименьшее число, потому что тогда пришлось бы допустить, что между этими двумя различными раціональными числами совсѣмъ не заключалось бы другихъ раціональныхъ чиселъ, что нелѣпо.

Поэтому возможны только три случая:

1) первый мѣшокъ содержитъ наибольшее число, второй не содержитъ наименьшаго;

2) первый мѣшокъ не содержитъ наибольшаго, второй—содержитъ наименьшее число;

3) первый мѣшокъ не содержитъ наибольшаго, второй не содержитъ наименьшаго числа.

Въ первыхъ двухъ случаяхъ число, опредѣляемое сѣченіемъ, полагается равнымъ упомянутому наибольшему числу или наименьшему числу.

Въ третьемъ случаѣ оно полагается отличнымъ отъ какого бы то ни было раціональнаго числа и притомъ бо́льшимъ, чѣмъ каждое число перваго мѣшка, и меньшимъ, чѣмъ каждое число второго мѣшка: такимъ образомъ, соглашеніе о величинѣ ирраціональнаго числа состоитъ въ томъ, что оно полагается заключеннымъ между обѣими группами чиселъ, на которыя раздѣляетъ всѣ раціональныя числа опредѣляющее это ирраціональное число сѣченіе.

3. Понятіе о дѣйствіяхъ опредѣляется указаніемъ рецепта, по которому, зная данныя числа, слѣдуетъ составлять сѣченіе, опредѣляющее новое число—результатъ дѣйствія.

Кромѣ этихъ соглашеній, Дедекиндъ еще явно высказываетъ постулатъ, необходимый для пользованія этими произвольными созданіями человѣческаго ума при измѣреніи величинъ, который можно здѣсь сформулировать такимъ образомъ: если на безконечной прямой выбрать опредѣленную начальную точку и если выбрать опредѣленную единицу длины, то всякой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное вещественное

число и наоборотъ. Этотъ постулатъ нетрудно распространить и на другія величины.

Теорія Дедекинда указываетъ, такимъ образомъ, однородную схему, по которой, специализируя рецепты, характеризующіе сѣченіе, можно опредѣлить вещественныя числа какого угодно рода (радикалы, логариѳмы и т. д.). Устанавливая, что всякое сѣченіе опредѣляетъ число, и предполагая, что всякое вещественное число можетъ быть задано сѣченіемъ, Дедекиндъ имѣетъ возможность дать, кромѣ того, ариѳметическое опредѣленіе понятія непрерывности.

§ 4. Я не думаю, однако, чтобы при первомъ ознакомленіи съ какимъ-нибудь понятіемъ общность изложенія была преимуществомъ. Фактически ученикъ будетъ и въ данномъ случаѣ думать только о томъ специальномъ родѣ чиселъ, съ которымъ ему придется оперировать, т. е. все-таки исключительно о радикалахъ, и разговоръ о томъ, что по Дедекинду опредѣляются и всякія другія числа, не вызоветъ въ его умѣ достаточно опредѣленныхъ идей. Я думаю, что полезнѣе ему сперва ознакомиться со специальной теоріей радикаловъ и на ней пережить всѣ тѣ специфическія трудности идеи ирраціональнаго числа, которыя такъ рѣзко отличаютъ радикалы отъ всѣхъ ранѣе изученныхъ чиселъ.

Поэтому и ученіе Дедекинда я буду въ дальнѣйшемъ оцѣнивать исключительно съ точки зрѣнія того, что оно даетъ ученику при ознакомленіи съ радикалами.

§ 5. Я указала на логическіе дефекты въ старомъ изложеніи и противупоставила этому соотвѣтствующіе пункты въ ученіи Дедекинда. Теперь я попробую показать, что порядокъ стараго изложенія вполнѣ допускаетъ восполненіе логическихъ предѣловъ.

1. Условимся, что заданіемъ показателя корня n и положительной подкоренной величины a опредѣляется существованіе нѣкотораго числа $\sqrt[n]{a}$, независимо отъ того, есть ли a n-ая степень какого-нибудь раціональнаго числа или нѣтъ.

2. Относительно величины этого новаго числа условимся, что всякое раціональное число, n-ая степень котораго меньше a, меньше него, а всякое раціональное число, n-ая степень котораго больше a, больше него.

3. Относительно **дѣйствій** сдѣлаемъ слѣдующія соглашенія: пусть существованіе суммы опредѣляется заданіемъ слагаемыхъ и знака сложенія; величина же ея, т. е. неравенства, которымъ она должна удовлетворять, — обобщеніемъ на радикалы слѣдующаго свойства суммы, справедливаго для раціональныхъ чиселъ: что съ увеличеніемъ каждаго изъ слагаемыхъ возрастаетъ и сумма.

Аналогично—существованіе произведенія пусть опредѣляется заданіемъ множителей и знака умноженія; величина же—обобщеніемъ на радикалы слѣдующаго свойства произведенія, справедливаго для положительныхъ раціональныхъ чиселъ: съ увеличеніемъ каждаго множителя возрастаетъ произведеніе.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ сопоставлены соотвѣтствующіе пункты сравниваеыхъ здѣсь изложеній.

Старое изложеніе.

1. Числа n, a и знакъ $\sqrt{}$ опредѣляютъ число $\sqrt[n]{a}$.
2. $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_k$, если $a_i{}^n < a < a'^n_k$.
3. a) Числа $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[m]{b}$ и знакъ $+$ опредѣляютъ число $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$, называемое суммой.
   b) $a_i + b_k < \sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b} < a'_h + b'_e$, если
   $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_h$ и $b_k < \sqrt[m]{b} < b'_e$.

Изложеніе Дедекинда.

1. Сѣченіе $(a_1, a_2, \ldots) | (a'_1, a'_2 \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a}$, если $a_i{}^n < a < a'^n_k$.
2. $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_k$, если $(a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots) | (a_1', a_2', \ldots a_k', \ldots)$ есть сѣченіе, опредѣляющее число $\sqrt[n]{a}$.
3. Сѣченіе $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_i + b_k, \ldots) | (a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2, \ldots a'_h + b'_e)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$, называемое суммой, если сѣченіе $(a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots) | (a'_1, a'_2, \ldots a'_h, \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a}$, а $(b_1, b_2, \ldots b_k, \ldots) | (b_1', b_2', \ldots b'_e \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[m]{}$

Такимъ образомъ, тому, кто по каки... ...дь соображеніямъ предпочтетъ старый порядокъ изложенія изложенію Дедекинда и ему подобнымъ, не слѣдуетъ опасаться, что онъ пускается въ дебри, изъ которыхъ нѣтъ никакого логическаго выхода.

§ 6. Если считать старый порядокъ изложенія реабилитированнымъ въ логическомъ отношеніи, то можно уже спокойно перейти къ педагогическому разбору обоихъ изложеній.

Прежде всего я отмѣчу ихъ отношеніе къ безконечнымъ совокупностямъ.

Само собою разумѣется, что свойства опредѣляемыхъ чиселъ по всякому пріемлемому ученію должны въ концѣ концовъ получиться тѣ же самыя. Въ частности, и отношеніе ирраціональнаго радикала къ совокупности раціональныхъ чиселъ будетъ по обоимъ изложеніямъ то же самое. Но, если въ логическомъ—аксіоматическомъ отношеніи безразлично, какія свойства положены въ опредѣленіе числа и какія являются уже слѣдствіями изъ этого, то въ педагогическомъ отношеніи это составляетъ большую разницу.

Самое понятіе о сѣченіи требуетъ продолжительныхъ разговоровъ для того, чтобы ученики могли съ нимъ освоиться. Но и тогда у нихъ едва ли сложатся тѣ самыя понятія, какія имѣются въ виду въ ученіи Дедекинда. Я нарочно говорила о «мѣшкахъ», чтобы избѣжать линейнаго распредѣленія чиселъ: мои личныя наблюденія надъ лицами, ознакомившимися съ этимъ ученіемъ уже въ высшемъ учебномъ заведеніи, показываютъ, что, какъ только дано линейное расположеніе чиселъ, величина числа, опредѣляемаго сѣченіемъ, принимается уже извѣстною, и отъ вниманія ускользаетъ произвольность ея опредѣленія. Въ сущности, и при изложеніи по Дедекинду ученикъ легко впадаетъ въ ту ошибку, изъ-за которой теперь отвергаютъ старое изложеніе: онъ напередъ безсознательно приписываетъ ирраціональному числу всѣ тѣ свойства, которыя должны послѣдовательно и отчетливо постулироваться; безконечныя же совокупности раціональныхъ чиселъ играютъ въ его глазахъ совсѣмъ особую роль: съ одной стороны, онѣ служатъ, какъ и въ старомъ изложеніи, для приближеннаго вычисленія, съ другой—онѣ создаютъ въ немъ впечатлѣніе, будто природа ирраціональнаго числа характеризуется именно тѣмъ, что при его опредѣленіи нельзя обойтись безъ безконечныхъ совокупностей.

Между тѣмъ, это послѣднее мнѣніе совершенно неправильно: 1) не всякое сѣченіе опредѣляетъ ирраціональное число; 2) мож-

но придумать такую систему ученія о числѣ, по которой нѣкоторыя ирраціональныя числа опредѣляются раньше, чѣмъ нѣкоторыя раціональныя, (напримѣръ, можно сразу послѣ цѣлыхъ чиселъ опредѣлить классъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ *).

Въ виду этого пользованіе сѣченіемъ, какъ условіемъ, опредѣляющимъ существованіе радикала, представляется мнѣ на разсматриваемой мною ступени знакомства съ числомъ и затруднительнымъ для ученика, и ведущимъ къ неправильной идеѣ объ ирраціональномъ числѣ.

§ 7. Теперь мы должны хорошенько вникнуть въ то, что, собственно, затрудняетъ ученика, который впервые слышитъ объ ирраціональномъ числѣ, и будутъ-ли эти его затрудненія устранены тѣмъ, что въ словахъ учителя не будетъ содержаться логическихъ погрѣшностей.

Станетъ ли ученику много легче отъ того, что мы явно выскажемъ тѣ соглашенія, которыя до сихъ поръ дѣлались молча—о существованіи и о величинѣ квадратнаго корня изъ двухъ? Вѣдь, для него и такъ очевидно, что если учитель заставляетъ его приближенно вычислять $\sqrt{2}$, то значитъ, онъ допускаетъ и его существованіе, и то, что онъ по величинѣ заключается между извѣстными рядами чиселъ. И тѣмъ не менѣе у него остается какое-то недоумѣніе. Поможетъ ли здѣсь подчеркиваніе произвольности соглашеній?

Мнѣ думается, что ученику прежде всего нужно убѣдиться въ томъ, что можно дѣлать такъ, какъ дѣлаютъ. Разговоръ о томъ, что это необязательно, что можно было бы и иначе, если бы мы захотѣли, скорѣе утвердитъ его въ мысли, что эти новыя числа—въ противоположность ранѣе ему знакомымъ—что-то не настоящее, не серьезное, придуманное только для развлеченія математиковъ. Да и правда ли, что

*) Т. к. между двумя послѣдовательными цѣлыми числами заключается нѣсколько такихъ радикаловъ, то пришлось бы установить условія неравенства этихъ новыхъ чиселъ между собою безъ возможности ссылаться на одни только неравенства между новымъ числомъ и ранѣе опредѣленными (цѣлыми). Точно такъ же осложнилось бы вслѣдствіе этого опредѣленіе дѣйствій надъ этими новыми числами, а также опредѣленіе условій равенства. Впрочемъ, сравнительная сложность была бы главнымъ образомъ въ формулировкѣ условій; практическое пользованіе опредѣленіями для сравненія чиселъ между собою было бы едва ли сложнѣе. Во всякомъ случаѣ такая послѣдовательность введенія новыхъ чиселъ вполнѣ осуществима.

принятыя соглашенія, «необязательны»? Слѣдуетъ хорошенько ограничить смыслъ этого слова и спросить себя, способенъ-ли ученикъ въ моментъ перваго ознакомленія съ ирраціональнымъ числомъ придать слову «необязательно» тотъ смыслъ, какой ему придается въ ариѳметическомъ анализѣ понятія о числѣ.

Названныя соглашенія необязательны въ томъ смыслѣ, что логически не зависятъ отъ соглашеній, принятыхъ относительно цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Но это не значитъ, что мы могли бы захотѣть сдѣлать вмѣсто нихъ какія угодно другія соглашенія. Эти соглашенія тѣсно связаны съ назначеніемъ вещественнаго числа, съ его ролью при измѣреніи величинъ. И можно еще спорить о томъ, является ли вопросъ о логической независимости опредѣленія чиселъ новаго рода болѣе важнымъ, чѣмъ вопросъ о цѣлесообразности выбора этого логически произвольнаго опредѣленія. Я смѣло могу сказать, что для всякаго, кто впервые знакомится съ числомъ новаго рода (даже независимо отъ возраста), послѣдній вопросъ является совершенно существеннымъ, перваго же онъ въ большинствѣ случаевъ даже не пойметъ: для самой его постановки требуется предварительное воспитаніе ума.

Опредѣленіе ирраціональнаго числа по Дедекинду, конечно, совершенно далеко отъ этого вопроса. Правда, полная система его аксіомъ заканчивается указаніемъ соотвѣтствія между величинами и числами. Но, вѣдь, перечисленіе всѣхъ свойствъ, опредѣляющихъ какое-нибудь понятіе, недостаточно для синтеза этихъ свойствъ въ единый цѣльный образъ, а безъ этого невозможно и свободное обращеніе съ понятіемъ.

На первомъ планѣ у Дедекинда стоитъ совсѣмъ другая задача и по отношенію къ ней всякій, знакомый съ исторіей ученія о числѣ, съ тѣми вопросами анализа, которые вызвали почти одновременное возникновеніе у разныхъ ученыхъ точнаго обоснованія понятія объ ирраціональномъ числѣ, видитъ цѣлесообразность пріемовъ Дедекинда. Но ученикъ прежде всего будетъ спрашивать о согласованіи свойствъ новыхъ чиселъ съ тѣми практическими потребностями, которыя вызвали созданіе ихъ, хотя сформулировать своего вопроса, быть можетъ, и не съумѣетъ.

§ 8. Что еще всегда будетъ затруднять ученика, это ка-

жущаяся **неравноправность** ирраціональнаго числа сравнительно съ числомъ раціональнымъ, которая и мѣшаетъ **вѣрить** въ ирраціональное число. Это впечатлѣніе неравноправности, по моему мнѣнію, вызывается главнымъ образомъ тѣмъ, что къ ирраціональному числу подходятъ со стороны его отрицательныхъ признаковъ. Когда убѣждаются, что дѣленіе нацѣло двухъ цѣлыхъ чиселъ невыполнимо, то переходятъ къ дробямъ и начинаютъ изучать **ихъ** свойства, а не отличіе ихъ отъ цѣлыхъ чиселъ; даютъ ученику рядъ наглядныхъ примѣровъ, иллюстрирующихъ практическій смыслъ понятія дроби. Когда же убѣждаются, что корень изъ раціональнаго числа не есть число раціональное, то прежде всего съ одной стороны подчеркиваютъ, что это число не можетъ быть выражено при помощи ранѣе знакомыхъ чиселъ, съ другой — всѣ заботы ученика сосредоточиваютъ на томъ, какъ бы все-таки выразить его при помощи раціональныхъ чиселъ — хотя бы приближенно! Естественно, что у ученика складывается впечатлѣніе что только раціональныя числа—настоящія.

§ 9. Мнѣ думается, что дѣло хоть отчасти было бы иное, если бы начинали съ другого конца: если бы сразу же связывали понятіе объ ирраціональномъ числѣ съ измѣреніемъ величинъ и всѣ соглашенія относительно ирраціональнаго числа мотивировали этой связью. Тѣ соглашенія, которыя предложены здѣсь для опредѣленія радикаловъ—спеціализированныя сперва для однихъ квадратныхъ корней—легко могутъ быть связаны съ конкретными вопросами, относительно которыхъ ученикъ охотно согласится, что смыслъ ихъ не нарушается изъ-за того, что непрерывно измѣняются входящія въ нихъ данныя. Сюда относятся: сопоставленіе каждому отрѣзку числа (измѣреніе отрѣзковъ), сложеніе отрѣзковъ, изученіе измѣненія площади прямоугольника въ зависимости отъ сторонъ и сопоставленіе площади прямоугольника числа (умноженіе чиселъ), опредѣленіе площади квадрата по сторонѣ и обратно (извлеченіе квадратныхъ корней).

Я должна сознаться, что отнюдь не считаю легкимъ для учениковъ доказательство существованія несоизмѣримыхъ отрѣзковъ — я и предпослала всей своей рѣчи заявленіе, что признаю понятіе объ ирраціональномъ числѣ по самому суще-

ству нелегкимъ—но все же я думаю, что доказательство несоизмѣримости діагонали квадрата со стороной въ концѣ концовъ можетъ быть понято ученикомъ. Когда же онъ пойметъ, что—при опредѣленномъ выборѣ единицы длины—на прямой, кромѣ точекъ, соотвѣтствующихъ цѣлымъ и дробнымъ числамъ, неизбѣжно должны существовать и точки, которымъ не могутъ быть сопоставлены раціональныя числа, то онъ почувствуетъ и цѣлесообразность введенія ирраціональныхъ чиселъ, и равноправность ихъ съ числами раціональными.

§ 10. Я старалась доказать, что прежній порядокъ изложенія совмѣстимъ съ логической отчетливостью, съ выдѣленіемъ независимыхъ аксіомъ, опредѣляющихъ новый родъ чиселъ.

Другой вопросъ, однако, поскольку на этой сторонѣ дѣла слѣдуетъ настаивать при первомъ ознакомленіи учениковъ съ радикалами. Я ожидаю, что сперва придется довольствоваться тѣмъ, чтобы примирить ихъ съ ирраціональнымъ числомъ, ознакомить съ его свойствами, не требуя отъ нихъ, чтобы они давали себѣ отчетъ въ логической независимости принятыхъ соглашеній, научить техникѣ обращенія съ нимъ.

Аксіоматическую сторону болѣе умѣстно будетъ выдвинуть при ретроспективномъ обзорѣ всего пройденнаго матеріала—въ старшемъ классѣ. Тамъ я считала бы чрезвычайно желательнымъ и ознакомленіе съ общимъ ученіемъ о вещественномъ числѣ, и съ идеей непрерывности въ духѣ Дедекинда. Умѣніе отличать чисто логическую необходимость отъ всякой другой, эмансипацію ума отъ привычки основываться на непосредственныхъ впечатлѣніяхъ я считаю важными не только для математика, но и для всякаго человѣка: это дѣлаетъ его болѣе гуманнымъ и справедливымъ, способнымъ становиться на чужую точку зрѣнія и терпѣливо слѣдить за чужими разсужденіями.

Признавая, однако, введеніе аксіоматики числа (равно какъ и аксіоматики геометріи) чрезвычайно желательнымъ въ средней школѣ, я не ожидаю, чтобы это было осуществимо въ сколько-нибудь широкой мѣрѣ: это можетъ имѣть успѣхъ только въ томъ случаѣ, если самъ учитель и достаточно любитъ эти вопросы, и достаточно въ нихъ освѣдомленъ».

Тезисы.

1. Опредѣленіе корня n-ой степени изъ a, какъ числа, которое будучи возвышено въ степень n даетъ a, опирается на цѣлый рядъ неустановленныхъ фактовъ.

2. Это опредѣленіе и все ученіе, на немъ основанное, создаютъ то, что у большинства учащихся идея объ ирраціональныхъ числахъ крайне туманна.

3. Логически удовлетворительное ученіе о числѣ дожно заключать слѣдующіе пункты:

a) Указаніе условій, опредѣляющихъ существованіе даннаго новаго рода чиселъ.

b) Указаніе на то, включаются ли эти новыя числа по величинѣ въ рядъ съ ранѣе опредѣленными числами, и, если да, то какое мѣсто каждое изъ нихъ занимаетъ въ этомъ ряду (введеніе знаковъ $=$, $>$, $<$).

c) Обобщеніе на эти новыя числа понятій о дѣйствіяхъ.

d) Указаніе соотвѣтствія между этими числами и величинами.

4. Этимъ требованіямъ удовлетворяютъ различныя современныя ученія о числѣ, дающія сразу общій методъ введенія всѣхъ вещественныхъ ирраціональныхъ чиселъ (Дедекинда, Кантора и др.).

5. Однако, эти ученія не могутъ служить для полнаго живого ознакомленія съ числомъ, такъ какъ носятъ характеръ пригодный для точнаго анализа уже существующихъ понятій, но непригодный для перваго ознакомленія съ понятіемъ, для синтетическаго созданія его въ умѣ учащагося: на затрудненія, которыя ощущаетъ самъ ученикъ при первой встрѣчѣ съ ирраціональнымъ числомъ, эти ученія вовсе не отвѣчаютъ.

6. Для перваго ознакомленія слѣдуетъ каждый родъ чиселъ (во всякомъ случаѣ—радикальны) изучать самостоятельно, основываясь на специальной системѣ аксіомъ и притомъ на такой, которая тѣснѣе связана съ назначеніемъ числа, съ практическимъ требованіемъ—измѣрять величины.

7. Для радикаловъ такая система можетъ быть развита довольно легко.

8. Въ послѣднемъ классѣ, при ретроспективномъ взглядѣ

на различные роды чиселъ, изученныхъ въ предыдущемъ курсѣ, общее ученіе о числѣ въ духѣ Дедекинда или Кантора можетъ оказаться чрезвычайно полезнымъ.

9. Простое откладываніе знакомства съ такого рода ученіемъ (безъ названнаго предварительнаго изученія), на болѣе позднее время безполезно: нѣкоторые существенные элементы въ немъ все равно останутся незамѣченными: до сознанія учащагося доходитъ только внѣшняя форма. И въ результатѣ въ умѣ его получается система, столь же наивная, какъ и прежняя, но содержащая логическіе скачки, которые ему гораздо труднѣе раскрыть.

Пренія по докладу Т. А. Афанасьевой-Эренфестъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.). „Когда Т. А. Эренфестъ начала свой докладъ, она заявила себя не особенной поклонницей лабораторнаго метода; съ ея точки зрѣнія лабораторный методъ надо бы совершенно исключить изъ ученія объ ирраціональныхъ числахъ. Я принадлежу къ поклонникамъ лабораторнаго метода, но къ тѣмъ поклонникамъ, которые желали бы примѣнять его разумно, безъ всякаго излишняго увлеченія. Мнѣ кажется, что методъ этотъ совершенно не противорѣчитъ самому строгому доказательству какого-нибудь положенія. Я убѣжденъ, что разумное веденіе лабораторныхъ занятій можетъ привести ученика къ идеѣ ирраціональныхъ чиселъ. Болѣе того, я увѣренъ, что только у того ученика понятіе объ ирраціональномъ числѣ будетъ ясно, который до него дошелъ не однимъ только путемъ слушанія абстрактныхъ разсужденій учителя; путь къ сознанію лежитъ не черезъ одни только уши“.

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Т. А. Эренфестъ въ своемъ докладѣ высказала пожеланіе, чтобы въ послѣднемъ классѣ среднихъ учебныхъ заведеній проходилась теорія ирраціональныхъ чиселъ. Я бы указалъ на слѣдующее: когда докладчица отмѣчала, какіе важнѣйшіе моменты въ этой теоріи особенно затруднительны, то высказала мнѣніе, что самое важное и трудное—это дать опредѣленіе ирраціональнаго числа. Говорятъ, что всѣ числа дѣлятся на два класса: раціональныя и ирраціональныя и уславливаются далѣе называть нѣкоторое число $\sqrt[n]{a}$—ирраціональнымъ. Я думаю, что такое опредѣленіе ирраціональнаго числа будетъ насиліемъ надъ учени-

ками. Можетъ быть аналитическая теорія числа привлекаетъ логической красотой, но она не даетъ образнаго представленія объ ирраціональномъ числѣ. Въ старшемъ классѣ можно дать аналитическое понятіе объ ирраціональномъ числѣ только въ томъ случаѣ, если въ младшихъ классахъ будетъ дано образное представленіе ихъ. Я присоединяюсь къ мнѣнію Т. А. Эренфестъ, что первоначальное понятіе объ ирраціональномъ числѣ нужно давать при помощи отрѣзковъ".

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Я горячо сочувствую мысли Т. А. Эренфестъ о введеніи ученія объ ирраціональныхъ числахъ въ среднюю школу; на необходимость этого введенія мы обычно наталкиваемся въ алгебрѣ, геометріи, тригонометріи. Мнѣ кажется, что съ понятіемъ объ ирраціональныхъ числахъ нѣтъ надобности ждать до перевода учениковъ въ старшіе классы: необходимо объ этомъ говорить раньше, особенно если эти числа будутъ подчинены формальнымъ законамъ, которымъ подчиняются операціи надъ цѣлыми и дробными числами".

„Понятіе о сѣченіи Дедекинда самое подходящее въ средней школѣ для среднихъ классовъ, а, можетъ быть, даже и для младшихъ. Необходимо вычислять по приближенію, и въ томъ случаѣ, если дѣти умѣютъ это дѣлать, ученіе объ ирраціональныхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними становится особенно легкимъ и простымъ. Я это покажу на одномъ примѣрѣ. Предположимъ, что мы опредѣляемъ съ помощью сѣченія квадратный корень изъ двухъ $(\sqrt{2})$".

„Съ одной стороны, беремъ числа, квадраты которыхъ меньше двухъ, съ другой стороны—числа, квадраты которыхъ больше двухъ:

$$1^2 \angle 2 \angle 2^2$$
$$1,4^2 \angle 2 \angle 1,5^2$$
$$1,41^2 \angle 2 \angle 1,42^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

и т. д.

„Такимъ образомъ, получается сѣченіе, которымъ опредѣляется число; это сѣченіе дѣлитъ числа на два класса: въ 1-омъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа, а во 2-омъ—наименьшаго. Опредѣлимъ еще $\sqrt{3}$, какъ сѣченіе чиселъ двухъ классовъ:

$$1^2 \angle 3 \angle 2^2$$
$$1,7^2 \angle 3 \angle 1,8^2$$
$$1,73^2 \angle 3 \angle 1,74^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

и т. д.

„Будемъ производить сложеніе соотвѣтствующихъ чиселъ

правыхъ и лѣвыхъ рядовъ, и установимъ разность или приростъ:

лѣвые ряды	разность	правые ряды
$1+1=2$	2	$2+2=4$
$1,4+1,7=3,1$	0,2	$1,5+1,8=3,3$
$1,41+1,73=3,14$	0,02	$1,42+1,74=3,16$
. . . .		. . . .

и т. д.

„Ученики легко подмѣтятъ, что разность между результатами сложенія при переходѣ отъ любой строки къ слѣдующей уменьшается (въ 10 разъ) и что здѣсь, такимъ образомъ, опредѣляется то сѣченіе, которое называется суммою чиселъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. И для всякаго дѣйствія: вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корня, при переходѣ къ слѣдующей строкѣ, по грубому опредѣленію, приростъ уменьшается въ 10 разъ, и результатъ каждаго дѣйствія надъ такими числами будетъ давать сѣченіе. Такимъ образомъ, понятіе о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами въ высшей степени облегчается: безъ нихъ же обойтись никакъ нельзя, когда приходится сталкиваться съ понятіями о соизмѣримости и о несоизмѣримости".

С. О. Шатуновскій. (Одесса). „Мнѣ приходится въ Университетѣ начинать свой курсъ „Введеніе въ анализъ" съ теоріи ирраціональныхъ чиселъ; я долженъ сказать, что старое изложеніе ирраціональныхъ чиселъ представляетъ очень и очень большія трудности не только для всѣхъ учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній, но и для тѣхъ лучшихъ изъ нихъ, которые попадаютъ на математическое отдѣленіе физико-математическаго фукультета въ Университетъ. Я думаю, что всякая попытка развить въ средней школѣ идею объ ирраціональныхъ числахъ въ какой-нибудь общей формѣ окончится неудачей. Средство, указанное докладчицей—не вводить общаго понятія объ ирраціональныхъ числахъ, а заниматься только несоизмѣримыми радикалами, т. е. разсмотрѣть небольшой классъ ирраціональныхъ чиселъ и теорію операцій надъ ними, въ нѣкоторой степени въ средней школѣ выполнимо".

„Я въ своей практикѣ при прохожденіи курса дробей во второмъ классѣ стараюсь внушить ученикамъ ту идею, что дроби—надуманныя числа, не натуральныя. У меня былъ такой случай, что ученики, не знакомые съ дробями, на мой вопросъ, какъ раздѣлить 4 на 5, отвѣтили, что 4 на 5 раздѣлить невозможно, это будетъ дѣленіе вещей, а не чиселъ".

„Когда дѣло доходитъ до ирраціональныхъ чиселъ, я показываю, что $\sqrt{2}$ не существуетъ. Есть задачи явно абсурдныя, сюда относится и нахожденіе числа $\sqrt{2}$; нѣтъ такого числа".

„Что касается дѣйствій надъ ирраціональными числами, то никакой бѣды не произойдетъ отъ такой постановки вопроса и ни въ какое противорѣчіе мы не впадемъ. Всѣмъ, интересующимся этимъ вопросомъ, я укажу, гдѣ можно прочитать объ этомъ".

П. А. Колубовская. (Спб.). „Можетъ быть среди собравшихся есть товарищи, которые съ нѣкоторымъ недоумѣніемъ уйдутъ изъ этой залы въ свои глухіе уголки, гдѣ имъ придется работать надъ ирраціональными числами. Я не могу уяснить, какъ докладчица относится къ тому вопросу, о которомъ упоминала въ началѣ доклада: она не признала себя поклонницей лабораторнаго метода; съ другой стороны, заканчивая иллюстрацію ирраціональныхъ чиселъ на несоизмѣримыхъ отрѣзкахъ,—она обратилась къ конкретнымъ фактамъ. Я въ недоумѣніи: съ чего надо начать—съ логическихъ обоснованій, которыя она внесла, или съ конкретнаго знакомства съ ирраціональными числами при помощи отрѣзковъ?"

К. Ө. Лебединцевъ. (Москва). „Я хотѣлъ здѣсь подѣлиться нѣкоторыми соображеніями, почерпнутыми мною изъ небольшого опыта въ примѣненіи на практикѣ тѣхъ самыхъ идей, которыя были изложены въ докладѣ. Прежде всего я долженъ предупредить, что я безусловно согласенъ съ основными положеніями докладчицы. Начинать надо не съ общей теоріи, а только съ частныхъ случаевъ, которые естественно впервые представляются учащимся въ теченіи курса, съ вопроса о радикалахъ, даже болѣе узко: съ частнаго случая ирраціональныхъ радикаловъ — квадратныхъ. Я перейду къ конкретнымъ примѣрамъ.

Возьму такую задачу: опредѣлить стороны квадрата, площадь котораго будетъ вдвое больше площади даннаго квадрата, сторона котораго принята за единицу. Сначала я предлагаю рѣшить эту задачу вычисленіемъ; не трудно сообразить, что это сводится къ нахожденію такого числа, квадратъ котораго равенъ двумъ. Затѣмъ мы доказываемъ, что такого числа нѣтъ среди извѣстныхъ имъ (ученикамъ) до сихъ поръ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Послѣ этого я предлагаю рѣшить ту же задачу построеніемъ; оказывается, что искомый квадратъ существуетъ, и сторона его равна діагонали даннаго. Теперь получается такое положеніе: сторона искомаго квадрата существуетъ, а числа для выраженія ея длины у насъ нѣтъ; значитъ нужно придумать новое число для ея обозначенія. Этому числу я приписываю названіе: „квадратный корень изъ двухъ" (при чемъ слова: „квадратный корень" пока не имѣютъ того значенія, которое учениками приписывалось раньше), и обозначаю его символомъ $\sqrt{2}$."

„Затѣмъ символу этому нужно дать мѣсто въ ряду чиселъ,

извѣстныхъ до сихъ поръ, т. е. раціональныхъ. Это тоже весьма не трудно сдѣлать при помощи чертежа. Этотъ символъ надо считать больше всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго меньше 2, и менѣе всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго больше 2. Подобнымъ же образомъ устанавливается смыслъ и другихъ аналогичныхъ символовъ ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д.), устанавливается понятіе о приближенныхъ значеніяхъ этихъ чиселъ и указываются способы нахожденія этихъ приближенныхъ значеній съ любой степенью точности".

„Теперь на очереди трудный вопросъ: какимъ образомъ въ этомъ мѣстѣ курса излагать теорію дѣйствій надъ ирраціональными корнями, теорію дѣйствій надъ квадратными радикалами, хотя бы въ томъ смыслѣ, чтобы дать опредѣленіе сложенію, умноженію, вычитанію и т. д. и показать, что представляетъ произведеніе $\sqrt{2}.\sqrt{5}$. Это, пожалуй, и возможно при подходящемъ составѣ класса, хотя все же чрезвычайно сложно и затруднительно, но, по счастью, въ этомъ нѣтъ практической надобности. Чего намъ нужно добиться отъ учащихся? Нужно, чтобы они удостовѣрились, что преобразованіе, которому подчиняются раціональные квадратные радикалы, распространяется и на ирраціональные квадратные радикалы".

„Какъ въ педагогической практикѣ подойти къ этому вопросу? Я подходилъ къ нему слѣдующимъ путемъ. Напр., нужно показать, что выраженіе $5\sqrt{2}$ можетъ быть замѣнено числомъ $\sqrt{50}$. Я заставляю учащихся вычислить приближенное значеніе $\sqrt{50}$ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д., а съ другой стороны—приближенное значеніе числа $5.\sqrt{2}$ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ . . . . . (при этомъ, конечно, надо знать элементарныя правила приближенныхъ вычисленій и брать приближенія $\sqrt{2}$ соотвѣтственно до $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{5000}$, ...). Въ концѣ концовъ учащіеся убѣждаются, что ирраціональные квадратные радикалы могутъ быть преобразованы по тѣмъ же правиламъ, какія установлены для раціональныхъ корней. Если предложить вопросъ, что значитъ приближенное значеніе, дѣти могутъ не дать отвѣта на этотъ вопросъ. Пока можно не устанавливать, что значитъ приближенное значеніе, а только думать о приближенномъ значеніи. Учащіеся интуитивно убѣждаются, что подобныя преобразованія, если мы будемъ производить вычисленія съ помощью приближеннаго значенія, ведутъ къ одинаковымъ результатамъ. Разъ такое убѣжденіе получается интуитивно, то такія преобразованія допускаются. Этимъ можно пока удовлетвориться. А если кто-либо изъ дѣтей предложитъ вопросъ: что значитъ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,—какой дать отвѣтъ? Не устанавливая пока, что значитъ эта сумма, будемъ мыслить ея прибли-

женное значеніе. Совершенно достаточно ограничиться этими свѣдѣніями, дальнѣйшее развитіе свѣдѣній объ ирраціональныхъ числахъ будетъ доступно въ старшихъ классахъ при повтореніи основъ алгебры. Въ какой мѣрѣ оно можетъ быть проведено, покажетъ опытъ".

С. И. Шохоръ-Троцкій. (Спб). „Уже въ ариѳметикѣ есть возможность заронить идею о существованіи ирраціональныхъ чиселъ. Этому мѣсто въ томъ пунктѣ курса ариѳметики, гдѣ учащіеся знакомятся съ безконечными десятичными дробями".

„О совокупности цифръ

0, 12 112 1112 11112 . . . . . .

тоже говорятъ, что она обозначаетъ нѣкоторое число (на любомъ мѣстѣ стоитъ одна совершенно опредѣленная цифра); что значитъ сложить такія числа, можно сказать только тогда, когда есть возможность сказать, какая цифра стоитъ на любомъ, напередъ заданномъ мѣстѣ этихъ записей. Такимъ образомъ, можно убѣдить учащихся впослѣдствіи, во-первыхъ, въ томъ, что мы создаемъ новый родъ чиселъ (не цѣлыхъ, не обыкновенныхъ дробей и не безконечныхъ десятичныхъ періодическихъ дробей), и, во-вторыхъ, въ томъ, что надо договориться, какъ опредѣлять сложеніе (а также и другія дѣйствія) надъ этими числами новаго рода."

„Въ остальномъ я соглашаюсь съ С. О. Шатуновскимъ и съ Т. А. Эренфестъ, не настаивающей на введеніи Дедекиндовой конструкціи ученія объ ирраціональномъ числѣ въ курсъ средней школы. Во всякомъ случаѣ опредѣленіе ирраціональнаго числа, какъ предѣла нѣкоторой перемѣнной величины, отвергнуто еще Вейерштрассомъ какъ „порочный кругъ" въ опредѣленіи".

А. Д. Санько (Курскъ) предлагаетъ ввести въ VIII классъ гимназій и въ VII классъ реальныхъ училищъ теорію ирраціональныхъ чиселъ, наиболѣе обоснованную, а также—понятіе о «числѣ» въ связи съ теоріей предѣловъ и понятіемъ о непрерывности.

П. С. Эренфестъ (Спб.). „Что дало поводъ къ введенію новыхъ чиселъ?—Большею частію, если и не всегда, это задачи, въ которыхъ приходится оперировать надъ величинами. Поэтому, весьма естественно и ученика знакомить съ новыми числами въ связи съ наглядными операціями надъ величинами, а не тѣмъ отвлеченно-ариѳметическимъ путемъ, по которому идутъ теоретики".

„Но здѣсь возникаетъ одно затрудненіе: ариѳметическое построеніе ученія о числахъ достигло съ теченіемъ времени замѣчательной точности и методической симметричности, чего нельзя

сказать о построеніи, опирающемся на операціи надъ величинами. Для школьнаго преподаванія это, очевидно, очень печально. Поэтому было бы важно знать, нельзя ли и эту послѣднюю точку зрѣнія на числа развить съ большей точностью и симметричностью. Въ этомъ отношеніи интересно прочесть работы Гамильтона и Клиффорда*), въ которыхъ эти авторы вводятъ два новыхъ рода чиселъ: кватерніоны и бикватерніоны. Гамильтонъ приходитъ къ кватерніонамъ потому, что онъ ищетъ числа, отвѣчающія операціи „вращенія и растяженія" вектора; бикватерніоны соотвѣтствуютъ еще болѣе сложнымъ пространственнымъ операціямъ. Чтобы сдѣлать для читателя понятнѣе введеніе этихъ новыхъ чиселъ, оба автора показываютъ сперва, какъ можно ввести уже знакомыя числа—напр., комплексныя и отрицательныя—въ связи съ пространственными операціями".

„При чтеніи этихъ работъ возникаютъ слѣдующія впечатлѣнія: 1) пока такого рода предложеніе чрезвычайно неточно и несимметрично, 2) должно быть очень нетрудно сдѣлать его точнымъ и симметричнымъ, и тогда оно оказалось бы чрезвычайно цѣннымъ въ дидактическомъ отношеніи".

В. М. Успенскій (Ст. Лабинская, Куб. обл.). „Мнѣ хотѣлось бы выяснить, какую цѣль имѣла докладчица: доказать ли, что введеніе въ курсъ средней школы понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо, или показать, какъ проходить этотъ курсъ".

„Что введеніе въ курсъ средней школы понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо, объ этомъ не можетъ быть и рѣчи; подобно тому, какъ во II—III классахъ должны проходиться дроби, такъ въ курсѣ V класса должны быть введены ирраціональныя числа, такъ какъ на первыхъ же порахъ при изученіи квадратныхъ чиселъ, а также во многихъ задачахъ геометріи: о сторонѣ вписаннаго въ кругъ квадрата, правильнаго треугольника,—приходится сталкиваться съ этими числами. Въ настоящее время, къ сожалѣнію, большинству преподавателей приходится ограничиться сообщеніемъ свѣдѣній по общепринятымъ учебникамъ съ соотвѣтствующими дополненіями и поясненіями, какъ указалъ проф. Шатуновскій".

В. В. Бобынинъ (Москва). „Ко всему, что я слышалъ по поводу ирраціональныхъ чиселъ, я считаю полезнымъ сдѣлать историческое дополненіе, привести справку о томъ, какъ въ исторіи умственной жизни человѣчества произошла встрѣча съ ирраціональными числами. Человѣчество впервые встрѣтилось съ ирраціональнымъ числомъ при распространеніи содержанія пиѳагоровой теоремы съ

*) См., напримѣръ: Клиффордъ, «Здравый смыслъ точныхъ наукъ». См. тамъ дальнѣйшую литературу.

раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, на которыхъ она была познана первоначально, на нераціональные. То, что могло совершиться у пиѳагорейцевъ, по всей вѣроятности, совершилось гораздо ранѣе у индусовъ. Въ разсматриваемыя отдаленныя времена извлеченіе квадратнаго корня изъ точныхъ квадратовъ производилось очень несложно, именно—черезъ простое сопоставленіе членовъ ряда квадратныхъ чиселъ съ соотвѣтствующими членами натуральнаго ряда. При опредѣленіи квадратнаго корня изъ неквадратнаго числа тотъ же методъ сопоставленія прямо показывалъ, что этотъ корень заключается между двумя послѣдовательными числами натуральнаго ряда. Этимъ и было положено начало познанію нахожденія ирраціональнаго числа между двумя рядами раціональныхъ чиселъ. Отправляясь отъ этого начала, методъ попытокъ или, какъ его называютъ иногда французы, экспериментальный методъ давалъ члены обоихъ рядовъ до какой угодно степени приближенія. Въ надеждѣ достигнуть недостижимаго, тоесть точнаго значенія квадратнаго корня изъ неквадратнаго числа, древніе математики шли указаннымъ путемъ все далѣе и далѣе въ сближеніи рядовъ, заключающихъ между собою ирраціональное число, пока не явился вдохновенный умъ, который, если воспользоваться выраженіемъ Шиллера, сказалъ имъ: „ты плывешь напрасно; безконечность передъ тобою и безконечность за тобою". Съ этого времени направленіе ихъ работъ рѣзко измѣнилось. Идея ирраціональности была высказана, осталось ее доказать. Но для этого уже не было надобности въ высокомъ вдохновенномъ умѣ. Сдѣлать это при помощи метода reductio ad absurdum, какъ единственно извѣстнаго тогда метода доказательства, могъ уже и обыкновенный дюжинный математикъ. Результатъ работъ этого рода представленъ у Аристотеля утвержденіемъ: „если бы діагональ квадрата была соизмѣрима съ его стороною, то четное число равнялось бы нечетному".

А. В. Бабаджанъ (Симферополь). „Въ виду тѣсной связи въ средней школѣ вопроса объ ирраціональныхъ числахъ съ вопросомъ о существованіи двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, покорнѣйше прошу докладчицу указать, какимъ способомъ предлагается ею доказать существованіе двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ; мнѣ кажется, что безъ алгориѳма Эвклида это доказательство не обойдется".

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.). „Вопросъ о существованіи $\sqrt[m]{A}$, какъ величины, сравнимой съ соизмѣримыми величинами, представляетъ вопросъ о существованіи такой величины вообще. Съ этой точки зрѣнія я считаю вполнѣ достаточнымъ узаконить существованіе $\sqrt[m]{A}$ существованіемъ (т. е. написаніемъ) уравненія:

$x^m = A$, ибо право на существованіе корня уравненія $F(x) = 0$ обусловливается не чѣмъ другимъ, какъ существованіемъ, т. е. написаніемъ уравненія, которому онъ долженъ удовлетворять. Это основывается на томъ соображеніи, что корнемъ уравненія называется (не „есть") то значеніе икса, при которомъ уравненіе обращается въ тождество. Поясню это слѣдующимъ примѣромъ: обратимся къ моменту, когда понятія о мнимомъ числѣ въ наукѣ еще не было, а требовалось рѣшить уравненіе $x^2 = -1$. Числа́, которое удовлетворяло бы этому уравненію, въ понятіяхъ того времени не существовало, т. е. никакія допускаемыя въ то время алгебраическія дѣйствія не приводили къ результату, который удовлетворялъ бы уравненію $x^2 = -1$. Но право на существованіе такой величины уже обусловлено написаніемъ уравненія $x^2 = -1$ и, слѣдовательно, оставалось только назвать ее".

„Ограничиваясь лишь однимъ этимъ примѣромъ (а ихъ можно привести очень много), не могу не указать, что выясненіе ученикамъ средней школы, начиная съ 3-го класса, этого взгляда сдѣлало бы имъ очевиднымъ, что объемъ математическаго анализа безграниченъ".

А. Р. Кулишеръ (Спб.). Докладчица указываетъ, что въ извѣстный моментъ преподаванія необходимо построить изученіе ирраціональныхъ чиселъ не на одной только конкретной основѣ, а на фундаментѣ болѣе или менѣе отвлеченныхъ соображеній. Что это возможно, что это пожеланіе не является преувеличеннымъ, можно судить по тому, что дѣтей въ возрастѣ отъ 10 до 14 лѣтъ мы знакомимъ съ такими глубокими отвлеченіями, какъ умноженіе и дѣленіе на единицу или умноженіе какого-либо числа на дробь. Правда, мы исходимъ при этомъ изъ задачъ конкретныхъ, но все же доводимъ учащихся до пониманія самаго характера выполняемаго здѣсь отвлеченія, по трудности превосходящаго, принимая во вниманіе менѣе зрѣлый возрастъ учащихся, то, что предлагаетъ намъ Татьяна Алексѣевна въ своемъ докладѣ. Я долженъ отмѣтить также величайшую осторожность, съ какой Т. А. подходитъ ко всякаго рода теоретическимъ соображеніямъ, предлагаемымъ учащимся средней школы. Такъ, напримѣръ, въ самой схемѣ доклада она предпочитаетъ сначала говорить не о „сѣченіяхъ", которыя могли бы вызвать нѣкоторый геометрическій образъ, а о распредѣленіи чиселъ по двумъ мѣшкамъ или урнамъ".

„Въ заключеніе напомню соображеніе Пьера Дюгема, высказанное имъ въ его книгѣ „Строеніе физической теоріи" относительно мышленія различныхъ ученыхъ. По его классификаціи такіе люди, какъ Вильгельмъ Томпсонъ, нуждавшійся постоянно въ людяхъ, облегчавшихъ ему построеніе тонкихъ теорій, или Гамильтонъ, испытывавшій потребность въ конкре-

тизаціи нѣкоторыхъ чиселъ и открывшій исчисленіе кватерніоновъ, должны быть отнесены къ числу умовъ широкихъ, но не глубокихъ. Ученики, прошедшіе курсъ, предложенный докладчицей, не будутъ знать теоріи ирраціональныхъ чиселъ во всей ея глубинѣ, они скорѣе будутъ видѣть шире перспективу... Но не будетъ ли этого достаточно? Пожелаемъ нашимъ ученикамъ, чтобы они, не гоняясь за философской глубиной познаній, обладали широтой ума Томпсона и Гамильтона".

Т. А. Эренфестъ (Спб.). „Съ очень многими замѣчаніями я согласна и могу только благодарить за нихъ, противъ многихъ я хотѣла бы возразить, но сейчасъ это за позднимъ временемъ невозможно. Считаю своею обязанностью отвѣтить однако на опредѣленные вопросы, которые были поставлены мнѣ. Во-первыхъ, меня спросили, какъ согласить то, что, съ одной стороны, я предлагаю при въ изученіи ирраціональныхъ чиселъ исходить изъ конкретныхъ образовъ, а съ другой высказываю отрицательное отношеніе къ лабораторному методу. Когда я высказала, что не совсѣмъ сочувствую лабораторному методу, то имѣла въ виду слѣдующее. Въ преподаваніи въ настоящее время наблюдается теченіе, которое, стремясь какъ можно больше облегчить ученикамъ усвоеніе знаній, знакомитъ ихъ съ научными положеніями только на наглядныхъ примѣрахъ, и то—не многихъ. Я считаю это недопустимымъ ни на какой ступени обученія".

„Во-вторыхъ, мнѣ задали такой вопросъ: какая цѣль моего доклада: доказать ли необходимость изученія ирраціональныхъ чиселъ въ средней школѣ или показать, какъ надо излагать это ученіе. Я не доказывала необходимости введенія ирраціональныхъ чиселъ, я хотѣла только разобрать: какія затрудненія, какъ логическія, такъ и методическія, представляются при различныхъ способахъ изложенія, и съ своей стороны предложила только краткое указаніе того пути, который мнѣ представляется болѣе удобнымъ".

„На вопросъ, какимъ способомъ я предлагаю доказывать существованіе двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, я отвѣчу: согласна что ученикамъ можетъ показаться труднымъ способъ, который я предлагаю, и я приму съ радостью другой, болѣе легкій, если мнѣ его укажутъ; но отказываться отъ доказательства существованія несоизмѣримыхъ отрѣзковъ я не нахожу возможнымъ".

XVII. Ученіе о величинѣ.

(О постулатахъ, лежащихъ въ основаніи понятія о величинѣ).

Конспектъ доклада пр.-доц. С. О. Шатуновскаго (Одесса).

«Возникновеніе какого-либо представленія α при сопоставленіи двухъ предметовъ a и b, разсматриваемыхъ въ порядкѣ a, b, мы будемъ обозначать символомъ $a \alpha b$. Представленіе α, а также и символъ $a \alpha b$ мы будемъ называть *отношеніемъ* предметовъ a и b, взятыхъ въ порядкѣ a, b, при чемъ a и b будутъ называться *членами* этого отношенія: a—предыдущимъ, b — послѣдующимъ. Нами допускается и тотъ случай, когда элементъ b есть элементъ тождественный съ элементомъ a.

Пусть G (a, b, c,..., x,..., y,..., z,...) будетъ выдѣленная какимъ-либо признакомъ система предметовъ a, b, c,..., x,..., y,..., z,... Представленіе α мы будемъ называть *обратимымъ* въ системѣ G въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда при наличности отношенія $x \alpha y$ будетъ имѣть мѣсто $y \alpha x$, каковы бы ни были два элемента x и y системы G. Представленіе α не будетъ называться обратимымъ въ системѣ G, если хоть для одной пары элементовъ x и y системы G будетъ имѣть мѣсто одно и только одно изъ отношеній $x \alpha y$, $y \alpha x$. Представленіе α мы будемъ называть *транзитивнымъ* въ системѣ G тогда и только тогда, когда для каждыхъ трехъ элементовъ x, y, z системы G при наличности двухъ отношеній

$$x \alpha y \text{ и } y \alpha z,$$

въ которыхъ послѣдующій членъ одного есть предыдущій другого, имѣетъ мѣсто отношеніе

$$x \alpha z.$$

Станемъ сопоставлять (ассоціировать) предметы системы G каждый съ каждымъ въ любомъ порядкѣ, а также каждый предметъ съ самимъ собою. Пусть при этихъ сопоставленіяхъ

въ нашемъ умѣ возникаютъ представленія $\alpha, \beta, \gamma, \delta,...$, и положимъ, что первыя три обладаютъ слѣдующими восьмью свойствами:

(1) каждые два предмета x, y системы G находятся другъ къ другу *по крайней мѣрѣ въ одномъ* изъ отношеній α, β, γ;

(2) α исключаетъ β, то-есть всякій разъ, когда два какихъ-либо элемента x, y системы G находятся въ отношеніи α, они не находятся въ отношеніи β и, находясь въ отношеніи β, они не находятся въ отношеніи α;

(3) α исключаетъ γ;

(4) для каждаго элемента x системы G имѣетъ мѣсто отношеніе

$$x \; \alpha \; x;$$

(5) отношеніе α обратимо въ системѣ G;

(6) α есть отношеніе транзитивное въ системѣ G;

(7) β есть отношеніе транзитивное въ системѣ G;

(8) γ есть отношеніе транзитивное въ системѣ G.

Эти восемь допущеній мы будемъ называть *постулатами количественнаго сравненія* или *постулатами скалярнаго расположенія*.

Ясно, что все, выводимое изъ этихъ постулатовъ въ отношеніи представленія β, можетъ быть перенесено mutatis mutandis на представленіе γ, ибо *система* нашихъ постулатовъ не измѣнится, когда мы замѣстимъ въ нихъ терминъ β терминомъ γ, а терминъ γ —терминомъ β.

Докажемъ теперь слѣдующія теоремы:

I. *Отношеніе* β *необратимо*: изъ $x \; \beta \; y$ слѣдуетъ $y \; \gamma \; x$.

Доказательство. Дано предложеніе $x \; \beta \; y$, и мы обязаны (1) принять по крайней мѣрѣ одно изъ трехъ предложеній $y \; \alpha \; x$, $y \; \beta \; x$, $y \; \gamma \; x$. Принимая $y \; \alpha \; x$, мы имѣемъ также (5) $x \; \alpha \; y$, что вмѣстѣ съ $x \; \beta \; y$ противорѣчитъ постулату (2), а потому $y \; \alpha \; x$ отвергается. Принявъ $y \; \beta \; x$ и имѣя $x \; \beta \; y$, мы выведемъ (7) $y \; \beta \; y$, что вмѣстѣ съ $y \; \alpha \; y$ (4) противорѣчитъ постулату (2). Такимъ образомъ $y \; \beta \; x$ также отвергается и, слѣдовательно, необходимо принять $y \; \gamma \; x$.

Изъ $x \; \gamma \; y$ будетъ вытекать $y \; \beta \; x$.

II. β *исключаетъ* γ,

ибо, принявъ $x \;\beta\; y$ и $x \;\gamma\; y$, имѣемъ по предыдущей теоремѣ также $y \;\beta\; x$, а изъ $x \;\beta\; y$ и $y \;\beta\; x$ слѣдуетъ (7) $x \;\beta\; x$, что въ соединеніи съ (4) $x \;\alpha\; x$ опять противорѣчитъ постулату (2).

III. *Въ отношеніи* $x \;\beta\; y$ *(или* $x \;\gamma\; y$*) можно любой изъ элементовъ* x *и* y *замѣнить элементомъ* z, *если только этотъ послѣдній находится къ замѣняемому въ отношеніи* α.

Доказательство. Примемъ, напримѣръ, предложенія $x \;\beta\; y$, $y \;\alpha\; z$. Изъ трехъ предложеній $x \;\alpha\; z$, $x \;\gamma\; z$, $x \;\beta\; z$ по крайней мѣрѣ одно принимается (1). Первое изъ нихъ $x \;\alpha\; z$ вмѣстѣ съ предложеніемъ $z \;\alpha\; y$, выводимымъ (5) изъ $y \;\alpha\; z$, даетъ (6) $x \;\alpha\; y$, что противорѣчитъ (2) предложенію $x \;\beta\; y$, слѣдовательно, $x \;\alpha\; z$ отвергается. Отвергается также предложеніе $x \;\gamma\; z$, ибо изъ него (теор. I) слѣдуетъ $z \;\beta\; x$, что вмѣстѣ съ принятымъ предложеніемъ $x \;\beta\; y$ даетъ (7) $z \;\beta\; y$ или (теор. I) $y \;\gamma\; z$, а это противорѣчитъ (3) данному предложенію $y \;\alpha\; z$. Такимъ образомъ, принявъ $x \;\beta\; y$ и $y \;\alpha\; z$, мы должны принять и $x \;\beta\; z$.

Что касается самихъ постулатовъ 1—8, то они представляютъ систему сужденій, логически независимыхъ, т. е. не противорѣчащихъ другъ другу и не вытекающихъ другъ изъ друга.

Отсутствіе противорѣчій доказывается таблицей № 1, въ которой выполняются всѣ 8 постулатовъ. Логическая независимость каждаго изъ постулатовъ отъ остальныхъ семи доказывается таблицами №№ 2—9. Въ каждой изъ этихъ таблицъ не выполняется только одинъ изъ 8-ми постулатовъ.

Таблица № 1.

$G\ (A,\ B,\ C,\ D,\ E)$

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица № 2.

$G\ (A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F)$

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\delta F$	Не выполняется 1-й постулатъ.
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\delta F$	
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\delta F$	
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\beta E$	$D\delta F$	
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$	$E\delta F$	
$F\alpha F$	$F\delta A$	$F\delta B$	$F\delta C$	$F\delta D$	$F\delta E$	

Присоединивъ къ таблицѣ № 1 соотношеніе $A\beta B$ будемъ имѣть таблицу № 3, въ которой выполняются всѣ постулаты кромѣ второго.

Таблица № 3.

$A\alpha A$	$\left\{\begin{array}{l}A\alpha B\\ A\beta B\end{array}\right.$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\beta D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

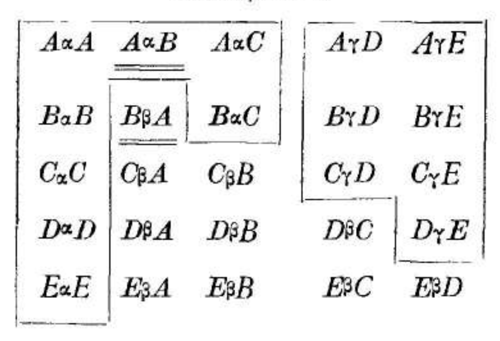
Подобнымъ же образомъ, присоединивъ къ таблицѣ № 1 соотношеніе $A\gamma B$, будемъ имѣть таблицу № 4, въ которой выполняются всѣ постулаты, кромѣ третьяго. Замѣнивъ въ таблицѣ № 2 $F\alpha F$ черезъ $F\beta F$, всѣ δ въ послѣдней горизонтали черезъ β и всѣ остальныя δ черезъ γ, получимъ таблицу № 5 для доказательства независимости 4-го постулата.

Таблица № 5.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\gamma F$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\gamma F$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\gamma F$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$	$D\gamma F$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$F\beta D$	$E\gamma F$
$F\beta F$	$F\beta A$	$F\beta B$	$F\beta C$	$F\beta D$	$E\beta E$

Замѣняя въ таблицѣ № 1 соотношенія $B\alpha A$, $C\alpha A$, $C\alpha B$ соотвѣтственно черезъ $B\beta A$, $C\beta A$, $C\beta B$, мы получимъ таблицу № 6 для доказательства независимости пятаго постулата.

Таблица № 6.



$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\beta A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\beta A$	$C\beta B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица № 7.

$G\ (A,\ B,\ C,\ D)$

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\beta C$	$B\gamma D$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\gamma B$	$C\gamma D$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$

Въ этой таблицѣ не выполняется 6-й постулатъ.

Если въ таблицѣ № 1 замѣнимъ соотношенія $D\beta A$, $D\beta B$, $E\beta A$, $E\beta B$, соотвѣтственно черезъ $D\gamma A$, $D\gamma B$, $E\gamma A$, $E\gamma B$, то получимъ таблицу № 8 для доказательства независимости 7-го постулата и, наконецъ, если въ таблицѣ № 8 замѣнимъ β на γ и γ на β, то будемъ имѣть таблицу № 9 для доказательства независимости восьмого постулата.

Таблица № 8.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\gamma A$	$D\gamma B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\gamma A$	$E\gamma B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица № 9.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\beta D$	$A\beta E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\beta D$	$B\beta E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\beta D$	$C\beta E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\gamma C$	$D\beta E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\gamma C$	$E\gamma D$

Условіе. Для группы G три представленія α, β, γ могутъ быть названы представленіями о равномъ, большемъ и меньшемъ только въ томъ случаѣ, когда выполнены постулаты 1—8.

Опредѣленіе. Группу элементовъ, для которой установлены представленія α, β, γ, удовлетворяющія постулатамъ 1—8, называютъ скалярной группой величинъ. Иногда самую группу называютъ скалярной величиной, а ея элементы значеніями этой величины».

Пренія по докладу пр.-доц. С. О. Шатуновскаго.

Въ преніяхъ, кромѣ самого докладчика, принимали участіе: *проф. Н. А. Шапошниковъ*, *П. С. Эренфестъ*, *А. Н. Шапошниковъ*, *проф. П. А. Некрасовъ*, *В. М. Меліоранскій* и др.

Проф. Н. А. Шапошниковъ (Москва) находитъ, что докладъ С. О. Шатуновскаго, представляющій весьма остроумное и интересное логическое упражненіе, не разрѣшаетъ, однако, вопроса объ опредѣленіи понятія „величина". Въ докладѣ идетъ рѣчь о сопоставленіи трехъ математическихъ соотношеній съ 8 логическими постулатами. Весь докладъ, по мнѣнію оппонента, заключается, собственно, въ анализѣ соотношеній между постулатами, и въ сопоставленіи постулатовъ между собой, тогда какъ опредѣленіе понятія должно было бы выдѣлить опредѣляемое понятіе изъ ряда другихъ понятій черезъ сопоставленіе съ ними. Только такимъ образомъ можно углубить понятіе; иначе все время придется вращаться въ области тезисовъ, какъ и случилось съ докладчикомъ, который не сопоставлялъ изучаемаго понятія съ другими. Подъ опредѣленіемъ понятія надо понимать, по словамъ проф. Шапошникова, указаніе сущности этого понятія, т.-е. указаніе тѣхъ признаковъ, которые это понятіе характеризуютъ вполнѣ

и отличаютъ отъ всѣхъ другихъ понятій. Въ началѣ своего доклада авторъ, какъ будто дѣлаетъ попытку къ сопоставленію изучаемаго понятія съ другими понятіями; именно, онъ вводитъ понятіе о *соотношеніе* между предметами a и b. Что же это за соотношеніе? спрашиваетъ проф. Шапошниковъ.

По словамъ докладчика, это соотношеніе, говоритъ Н. А. Шапошниковъ, можетъ оказаться, напр., въ томъ, что a — учитель, b—ученикъ. Но между двумя лицами (предметами), продолжаетъ проф. Шапошниковъ, существуютъ въ высшей степени разныя соотношенія: родство, подчиненность и т. п. Своей иллюстраціей докладчикъ, по мнѣнію оппонента, необъятно расширилъ и усложнилъ кругъ представленій, изъ которыхъ должно быть выдѣлено понятіе о величинѣ, тогда какъ слѣдовало свести опредѣляемое понятіе къ понятію болѣе простому, чѣмъ оно само.

П. С. Эренфестъ (Спб.) проситъ разъяснить слѣдующіе два вопроса, вызываемые докладомъ. Во-первыхъ, соотношенія γ и входятъ въ аксіомы вполнѣ симметрично. Какое же дополненіе необходимо сдѣлать къ предложеннымъ 8 постулатамъ, чтобы символъ β соотвѣтствовалъ именно тому, что мы называемъ «больше», а символъ γ — именно тому,что мы называемъ „меньше“?

Во-вторыхъ, въ таблицу (1) входятъ 5 элементовъ: A, B, C, D, E, и мы убѣдились изъ опыта, что для этихъ 5 элементовъ безъ противорѣчія выполняются предложенные 8 постулатовъ. Спрашивается, не возникнутъ ли противорѣчія въ томъ случаѣ если возьмемъ достаточно большое конечное число n такихъ элементовъ?

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.) присоединяется къ П. С. Эренфесту по вопросу о возможности противорѣчія въ постулатахъ при большемъ числѣ элементовъ; далѣе онъ указываетъ, что по вопросу о примѣнимости системы аксіомъ докладчикъ ввелъ дополнительный постулатъ: если существуетъ система реальныхъ вещей, соотвѣтствующихъ извѣстнымъ логическимъ законамъ, то, стало-быть, эти логическіе законы не содержатъ противорѣчія. Вводя этотъ постулатъ, докладчикъ, по словамъ А. Н. Шапошникова, ведетъ насъ отъ абстрактнаго къ конкретному, тогда какъ въ дѣйствительности мы воспринимаемъ идеи *интуитивно*, идемъ путемъ обратнымъ — отъ конкретнаго къ абстрактному.

Проф. П. А. Некрасовъ (Спб.). „Споры о 8 постулатахъ количественнаго сравненія, выдвинутыхъ докладчикомъ,о числѣ и выраженіи этихъ постулатовъ, т. е. объ основаніяхъ логики величинъ, имѣютъ свое глубокое основаніе. Тутъ умѣстно вспомнить одну изъ антиномій Канта; тезисъ этой антиноміи гласитъ: